# CALCOLO NUMERICO
# Corso di Laurea in Informatica
# A.A. 2020/2021 – Prova Scritta 15/07/2021

---

| NOME | COGNOME | MATRICOLA |
|---|---|---|

---

**Esercizio 1** Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, definita come

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4 \text{ se } i = j; \\ 1 \text{ se } i = j-1 \text{ o } i = j+1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Mostrare che $A$ ammette fattorizzazione LU.

2. Posto $U = (u_{i,j})$ il fattore triangolare superiore si mostri per induzione su $k$ che vale $2+\sqrt{3} \leq u_{k,k} \leq 4$, $1 \leq k \leq n$.

3. Mostrare che $\det(A) \geq (2+\sqrt{3})^n$ $\forall n \geq 2$. Detto `realmax`$= 1.7977e+308$ il più grande numero di macchina si determini $n$ in modo tale da generare overflow nel calcolo del determinante.

**Esercizio 2** Per il calcolo di $\alpha = \sqrt{a}$, $a > 0$, si considerano le equazioni

$$f_1(x) = x^2 - a = 0, \quad f_2(x) = \frac{a}{x^2} - 1 = 0.$$

1. Mostrare che il metodo delle tangenti applicato a $f_1(x)$ con punto iniziale $x_0$ genera successioni convergenti ad $\alpha$ per ogni $x_0 > 0$.

2. Mostrare che il metodo delle tangenti applicato a $f_2(x)$ con punto iniziale $x_0 = \sqrt{5a}$ non genera una successione convergente ad $\alpha$.

3. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $a$, $tol$ e $x_0$ genera la successione $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, $n \geq 0$, generata dal metodo delle tangenti applicato a $f_1(x)$ con punto iniziale $x_0$ arrestandosi quando $|x_n^2 - a| \leq$ `tol` e restituendo in uscita la coppia $(x_n, n)$.