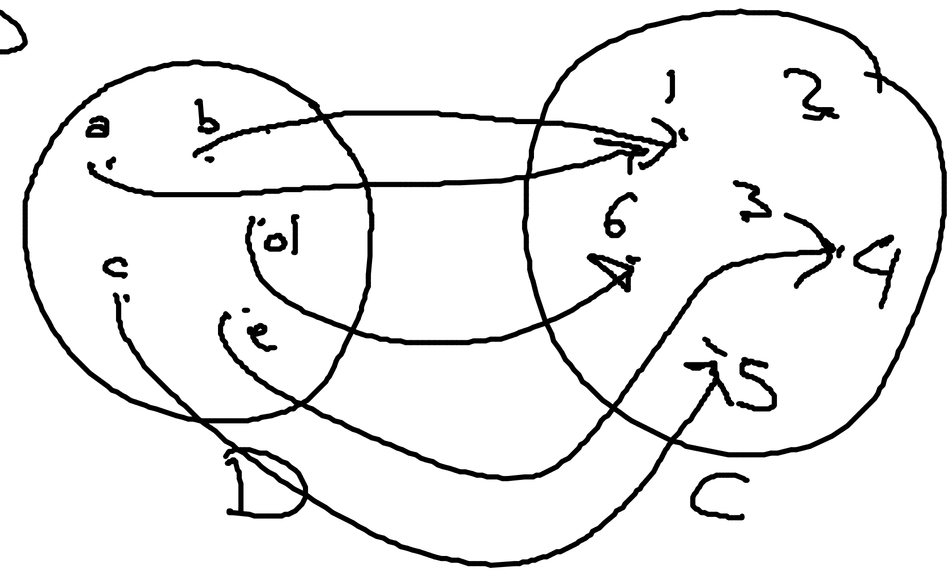
dominio codominio

Una <u>funzione</u> f da D a C è una legge che associa ad ogni el di D uno e un solo elemento di C

$$f : D \longrightarrow C \qquad \forall\, d \in D$$
$$d \longmapsto f(d)$$



$Im\, f = \{1, 4, 5, 6\}$

Esempio

$$f \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

$$g \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longrightarrow x^2$$

$$f \neq g$$

Esempi

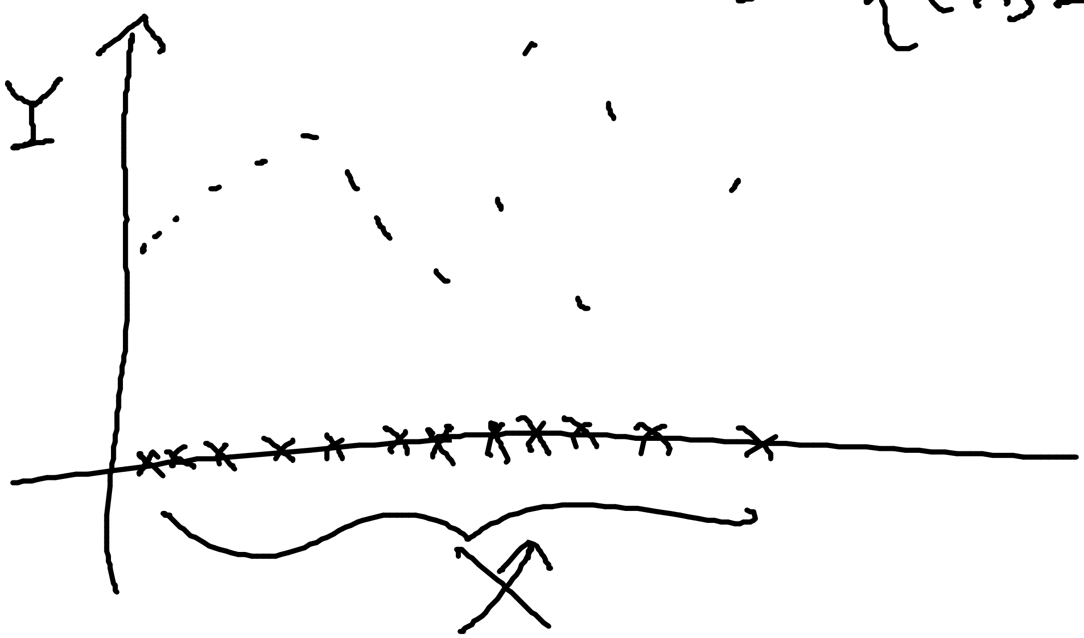
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{NO} \quad \text{perché} \quad f(0) = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{ok}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

$$\{1\ 2\ 3\ 4\} \longrightarrow \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
$$x \longrightarrow x + 10 \qquad \text{NO}$$

Def Sia f una funzione $f: X \to Y$. Il grafico di f è l'insieme

$$G_f := \{ (x, y) \in X \times Y \mid y = f(x) \}$$
$$= \{ (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \}$$



Def: $f: X \to Y$

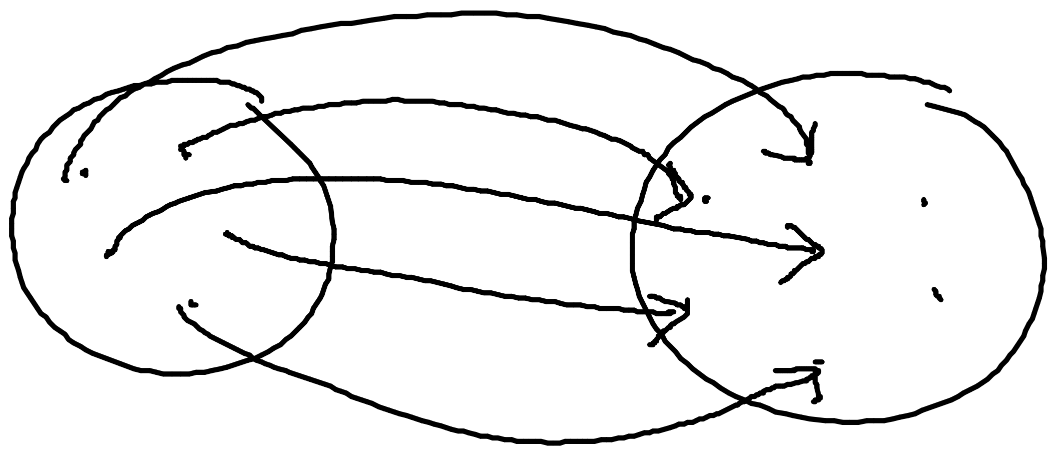
$$\mathrm{Im}\, f = \{ y \mid \exists x \text{ con } y = f(x) \}$$

$$\mathrm{Im}\, f \subseteq Y$$

Def $f : X \longrightarrow Y$ si dice INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Se elementi distinti del dominio hanno imm. distinte

$(\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$



INIETTIVA [ogni el del codominio arriva al più 1 freccia]

Oss: Se $|X| = n$ $|Y| = m$
se $m < n$ Non ci sono FUNZIONI INIETTIVE DA X a Y

Oss $f: X \to Y$ è iniettiva e $|X| = n$

$\Rightarrow |f(X)| = n$

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ $f(X) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ se f è iniettiva

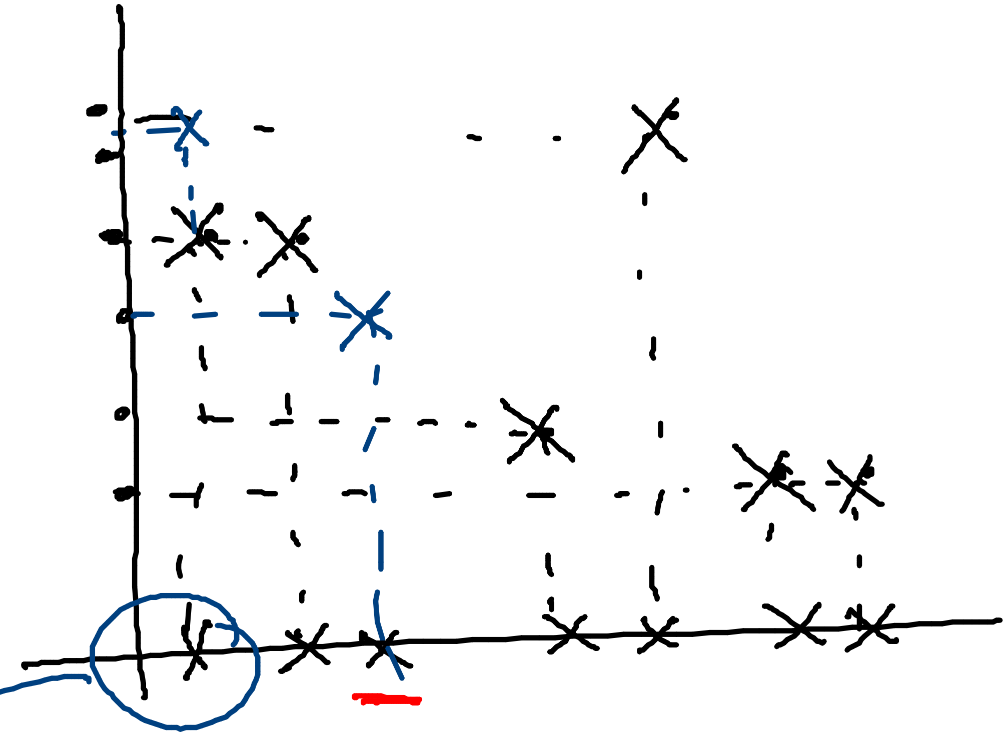
$f(x_i) \neq f(x_j) \quad \forall i \neq j$

$\# f(X) = |f(X)|$

CARDINALITÀ (numero di elementi)

Oss: ~~($f: X \Longrightarrow Y$)~~

Se ho $A \subset X \times Y$ questo è il grafico di una funzione se ad ogni el di X corrisponde uno e un solo el di Y



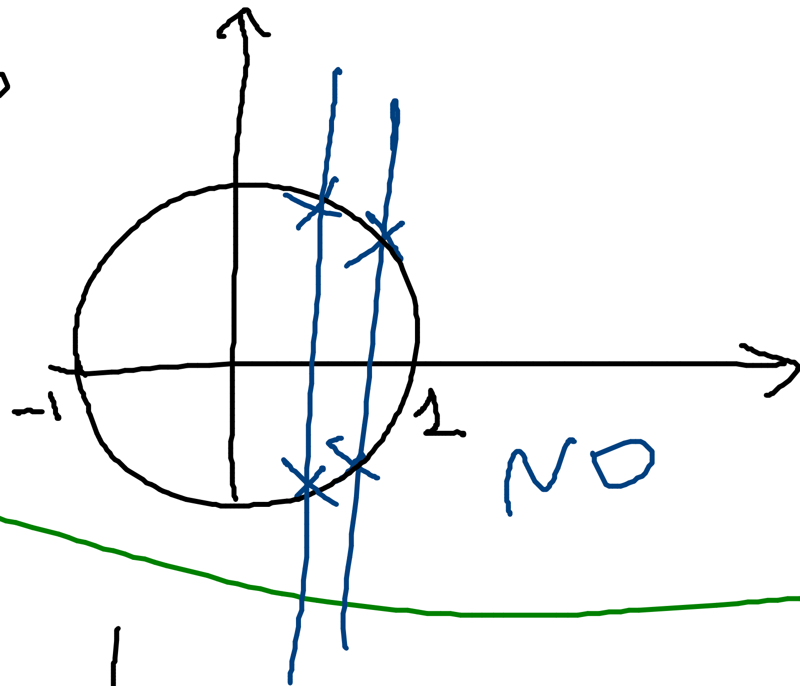
A è grafico di una funzione se le rette verticali passanti per i punti di X incontrano A in esattamente 1 pto.

non è funzione perché questo elemento ha 2 immagini

non ho associato niente

NON è grafico di una funzione

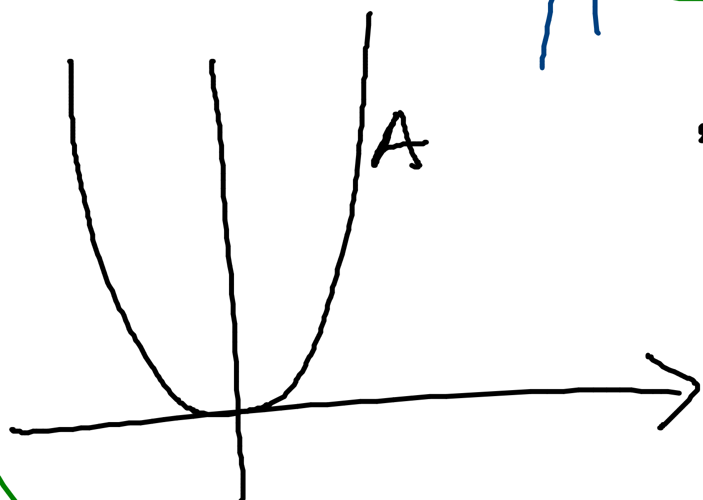
Esempio



La circonf non è grafico

$[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

NO



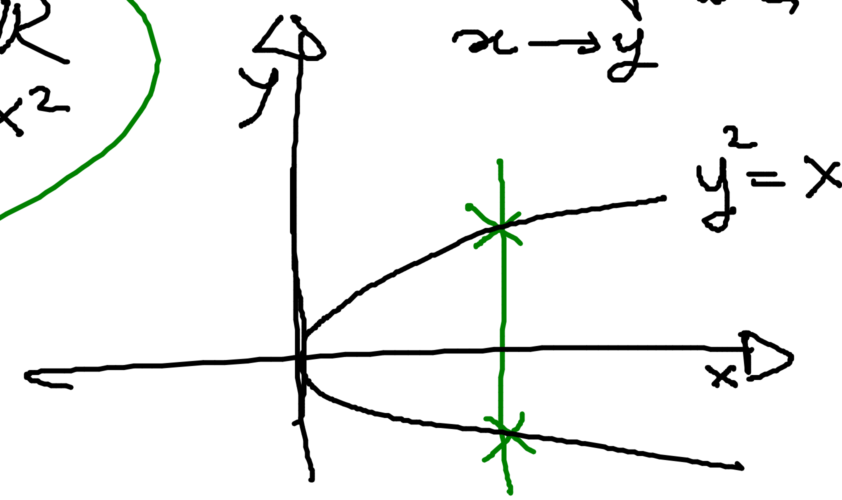
A

A è grafico di $f \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2$

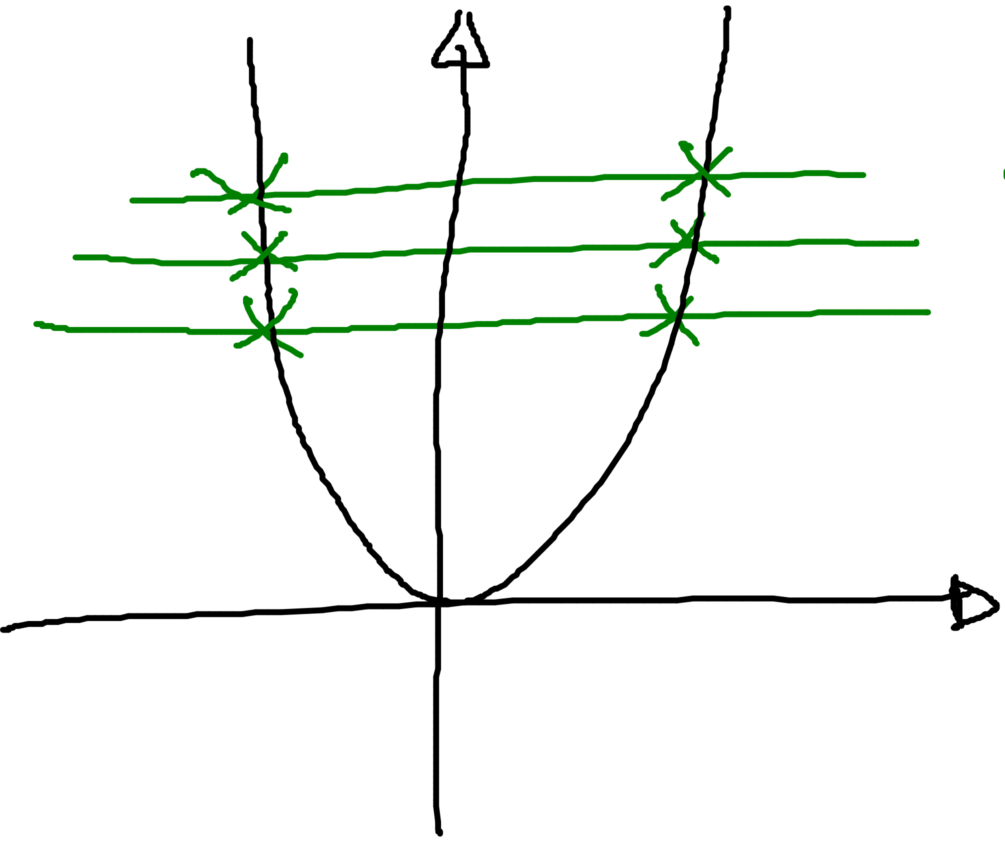
Non è grafico di una funzione

$x \longrightarrow y$



Come si riconosco dal grafico le funzioni iniettive?

$y = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longrightarrow x^2$ $\quad G_f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$



NON E' INIETTIVA

Def: $f\ X \to Y$ si dice SURGETTIVA se ogni el del codominio è immagine di almeno 1 el del dominio

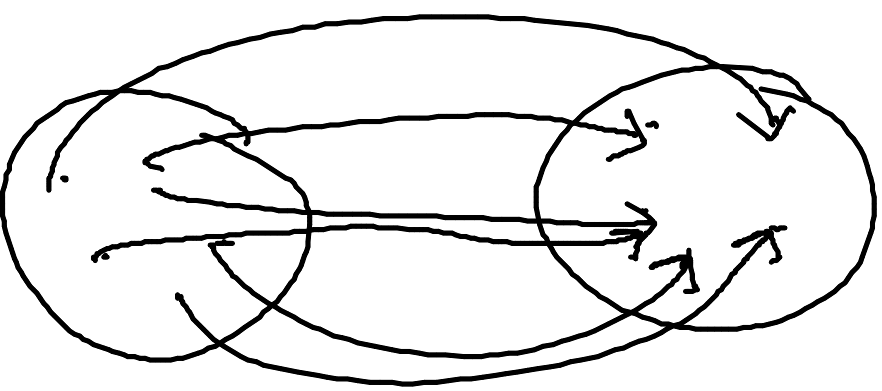
$\forall y \in Y \quad \exists x \in D$ t che $\quad y = f(x)$

$f\ \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON è surgettiva $\quad -1 \neq f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\quad\ \ x \to x^2$

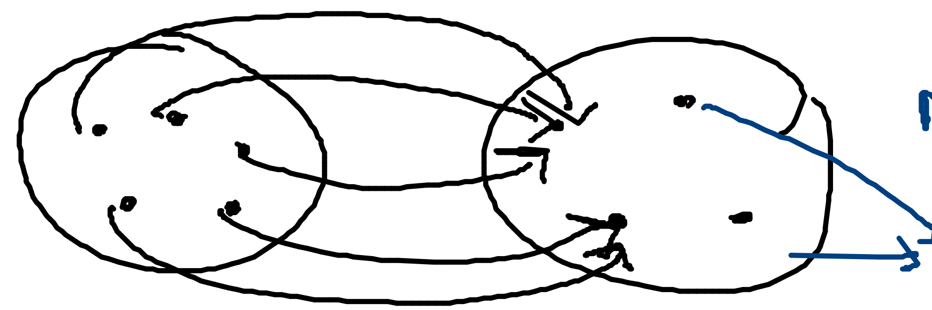
$g\ \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ È SURGETTIVA perché $\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad \exists x \in \mathbb{R}$ t ch
$\quad\ \ x \to x^2$

$$f(x) = x^2 = y \qquad x = \sqrt{y}$$

$$f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$



SU



NON SU

NON SU

Oss 1: Se $|X| = n$ $|Y| = m$ e $m > n$ non ci sono funzioni surgettive $X \to Y$

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ $f(X) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$

$|f(X)| \leq n$ se $n < m$ $f(X) \subsetneq Y$ NESSUNA f è SURGETTIVA

Oss 2: Dal grafico di una funzione posso leggere la surgettività. f $X \to Y$ è surgettiva se $\forall y \in Y$ la retta // asse X passante per Y interseca il grafico

$h \quad \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

NON È SU

perché la retta

$y=0 \in \mathbb{R}$ non interseca

il grafico

Def $f\ X \to Y$ è BIGETTIVA se è sia iniettiva che suriettiva.

$\forall y \in Y \quad \exists!\, x \in X$ t.c. $f(x) = y$

cioè ogni el di Y ha una e una sola CONTROIMMAGINE.

Es: $h: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(m, n) \longrightarrow 3m + 5n$

$\ell \; \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ NON È FUNZIONE

$n \to \sqrt{2}\, n$

- h è ben definita $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}$ $h(m,n) = 3m + 5n \in \mathbb{Z}$ univoc. det.

- h è iniettiva? NO

$h(3,5) = 9 + 25 = 34$

$h(8,2) = 3 \cdot 8 + 5 \cdot 2 = 34$

ma $(3,5) \neq (8,2)$

- h è surgettiva? $h(m,0) = 3m$ $\forall m$ $\leftarrow$ Im h contiene tutti i multipli di 3

$h(2,-1) = 1$

$h(2+m, -1) = 3(2+m) - 5 = 1 + 3m$ $\forall m$

$h(-1,1) = -3 + 5 = 2$

$h(-1+m, 1) = 2 + 3m$ $\forall m$

h è surgettiva perché $\forall z \in \mathbb{Z}$

$$z = \begin{cases} 3m \\ 3m+1 \\ 3m+2 \end{cases}$$

$z = 3m$ $h\,||\mathbb{Z}\,\neg$

- h è bigettiva? NO

Def $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\underbrace{g \circ f}_{\text{g composto f}} \quad x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x+1$

$g(x) = x^2$

$$g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$$

$$f \circ g(x) = f(x^2) = x^2+1$$

La comp tra funzioni non è commutativa $f \circ g \neq g \circ f$

Es $f\ X \to Y \quad g\ Y \to Z \quad f, g$ iniettive $\Rightarrow g\circ f$ è iniett.

f, g surgettive $\Rightarrow g\circ f$ è surgettiva

Proposizione $f\ X \to Y,\ g\ Y \to X,\quad g\circ f(x) = x \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f$ è iniettiva e g è surgettiva.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & X \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) = x \end{array}$$

Dim! $x_1, x_2 \in X$

$f(x_1) = f(x_2)$

$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\quad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$

$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow f$ è iniettiva

g è su: $\forall x \in X\ \exists\ y \in Y$

t che $g(y) = x$

Prendo $y = f(x) \in Y \qquad g(\underset{\shortparallel\atop y}{f(x)}) = x$

Def - $f \; X \to Y \quad g \; Y \to X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Si dice che g è l'inversa di f se (e che f è l'inversa di g)

$g \circ f = Id_X \quad X \to X \qquad$ e $\qquad f \circ g = Id_Y$

$\downarrow$

$g \circ f(x) = x \;\; \forall x \in X \qquad\qquad f \circ g(y) = y \;\; \forall y \in Y$

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} x \qquad\qquad y \xrightarrow{g} g(y) \xrightarrow{f} y$

- $f \; X \to Y$ è INVERTIBILE se $\exists \; g \; Y \to X$ funzione inversa di f

Proposizione 2: Siano $f\ X \longrightarrow Y$ e $g\ Y \longrightarrow X$ una l'inversa dell'altra $\Rightarrow$ f e g sono bigettive

Dim: $g \circ f = id_X$ $\quad g \circ f(x) = x \Rightarrow f$ iniettiva e g surg.

$f \circ g = id_Y$ $\quad \underline{f \circ g(y) = y}$ $\forall y \in Y \Rightarrow g$ iniettiva e f surgettiva

$\Rightarrow f$ e g bigettive

Prop 3: f è invertibile $\Leftrightarrow$ è bigettiva

Dim $\Rightarrow$ è la prop 2

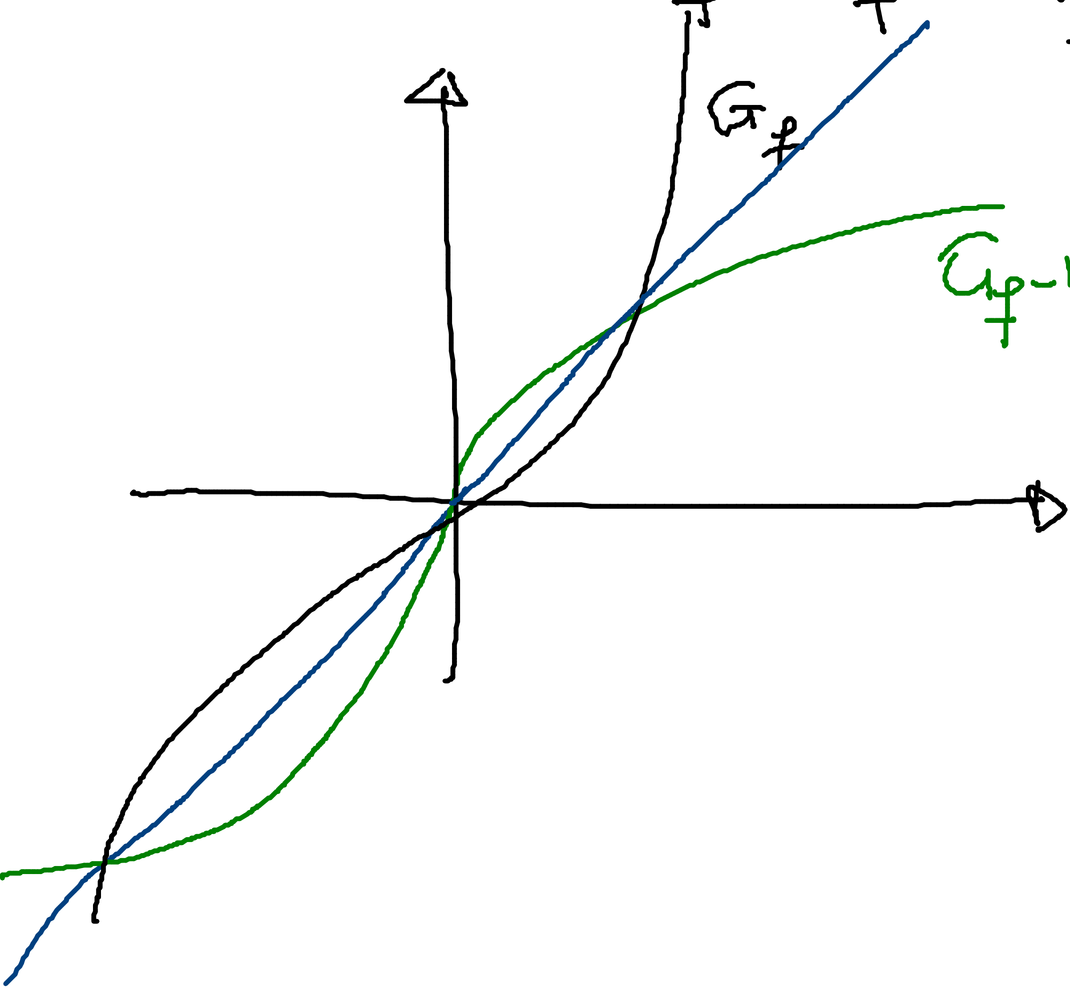
$\Leftarrow$ f bigettiva $\underline{\forall y \in Y}$ $\underline{\exists!\, x_y \in X}$ tale che $f(x_y) = y$

Definisco $g\ Y \to X$ ponendo $g(y) = x_y$ $\leftarrow$ la g è una funzione perché ad ogni y uno-o 1 e 1 solo x_y

$f: X \to Y$ $\quad f$ bigettiva $\iff$ invertibile

$g = f^{-1}$ la funzione inversa $\quad f \circ f^{-1} = id_Y$

$f^{-1} \circ f = id_X$



$G_{f^{-1}}$ è il simmetrico rispetto alla retta $y=x$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$$

$$y \longrightarrow x$$

Es:

$$f \;\; \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

Trovare le controimmagini $0, 2, 4$

non è surgettiva perché $2 \in \mathbb{Q}$ è non è immagine di nessun el del dominio.

controimmagini di $0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid f(x) = x^2 = 0\} = \{0\}$

" " $2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid f(x) = x^2 = 2\} = \emptyset$

" " $4 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 4\} = \{\pm 2\}$

non è iniettiva

ES $\quad f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{se } x \text{ è quadrato in } \mathbb{N} \\ 2x+1 & \text{se } x \text{ non è } \square \end{cases}$$

f iniettiva? è su? è biiettiva?

f è iniettiva? $\quad x_1 = a^2 \quad x_2 = b^2 \quad f(x_1) = 2a = f(x_2) = 2b$

$\iff a = b \iff x_1 = x_2$

x_1, x_2 non $\square$ $\quad f(x_1) = 2x_1 + 1 = f(x_2) = 2x_2 + 1$

$\iff x_1 = x_2$

$x_1 = a^2 \quad x_2$ non $\square$ $\quad \underset{\text{pari}}{f(x_1)} \neq \underset{\text{dispari}}{f(x_2)}$

SI

f è su? NO

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N}$ t che $f(x) = n$?

$n \in \mathbb{N} \quad n = 2k+1$ e $k \neq \square \qquad f(k) = 2k+1$

$k = \square \qquad f(k) = 2\sqrt{k} \neq n$

$$n = 19 = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & x = \square \\ \underline{2x+1} & x \neq \square \end{cases}$$

$\leftarrow$ NO 19 è dispari

$2\sqrt{x}$ pari

19 non è immagine di un $\square$

$19 = f(x) = 2x+1$ no perchè

l'unico x che risolve è $x = 9$ che è $\square$