$A, B, C \subseteq \Omega$

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

$$x \in A \cap (B \cup C) \iff \boxed{x \in A} \wedge x \in B \cup C$$

$$x \in B \vee x \in C$$

$x \in B \iff x \in A \cap B$

oppure $\quad \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in C \iff x \in A \cap C$

$$A = \{0, 1, *, \heartsuit\}$$

$0 \in A \qquad 1 \in A \qquad * \in A \qquad \heartsuit \in A$

$\{0\} \notin A \qquad \{0\} \subseteq A$

$\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$ ← è un insieme i cui elementi sono sott. di A

$\{0\} \in \mathcal{P}(A) \qquad A \in \mathcal{P}(A)$

$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \qquad 0 \notin \mathcal{P}(A)$?

$\forall$ per ogni $\qquad \exists$ esiste

Ogni essere umano ha una madre

$\Omega = \{\text{esseri umani}\} \qquad \mathcal{M} = \{\text{madri}\}$

$\forall x \in \Omega \quad \exists y \in \mathcal{M}$ tale che y è madre di x

$\exists y \in \mathcal{M}$ t che $\forall x \in \Omega$ y è madre di x

Una funzione f è una legge che associa ad ogni el del DOMINIO D uno e un solo el del codominio C

$$f: D \longrightarrow C \qquad \forall\, d \in D \ \exists!\, c \in C \text{ t.che } f(d) = c$$

y è madre di x

$\Omega = \{$esseri umani$\}$

$\mathcal{M} = \{$madri$\}$

$$\Omega \longrightarrow \mathcal{M}$$

madre $\longrightarrow$ figlio NON È UNA FUNZIONE

$$x \longrightarrow y = \text{madre di } x$$

$\forall x \in \Omega \quad \exists!\, y \in \mathcal{M}$ t che $f(x) = y$

NEGHIAMO QUESTA FRASE

$\exists\, x \in \Omega$ tche $\forall y \in \mathcal{M} \quad f(x) \neq y$

Principio di induzione I forma

Sia $P(n)$ una proprietà definita sui numeri naturali

Supponiamo che (a) $P(n_0)$ vera $n_0 \in \mathbb{N}$

(b) $\forall k \geq n_0$, se $P(k)$ vera $\Rightarrow$ $P(k+1)$ è vera

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

Principio di induzione II forma (forma forte)

Sia $P(n)$ una proprietà definita su $\mathbb{N}$.

Supponiamo che (a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale $P(n_0)$ è vera

(b') $\forall\, k \geq n_0$ se $P(m)$ è vera $\forall\, n_0 \leq m \leq k \Rightarrow P(k+1)$ è vera

$\Rightarrow P(n)$ è vera $\forall\, n \geq n_0$

Ind I

(a) . . . . . .

(b) $\forall\, k \geq n_0$ $P(k)$ vera $\Rightarrow P(k+1)$ vera

Ind II è più forte dell'induzione I perché ha ipotesi più deboli, cioè (b') è più debole di (b)

In realtà il principio di Ind I è equivalente alla ind II

Ind II $\Longrightarrow$ Ind I (perché l'ip (b') è più debole dell'ip (b))

Vedremo $\Longleftarrow$

Esempio

Ogni intero >1 si scrive come prodotto di numeri primi

Dimostro per ind II su n la p. $P(n) = \{n \text{ è prodotto di primi}\}$

PASSO BASE $n_0 = 2$ $P(2)$ vera perché 2 è primo.

PASSO INDUTTIVO Supponiamo $P(m)$ sia vera $\forall\, n_0 \le m < k$
($n_0 = 2$)

devo dim che $P(k)$ è vera

$$k = \begin{cases} \text{primo} & P(k) \text{ vera} \\ \text{non è primo} = xy & \end{cases}$$

$1 < x < k \quad 1 < y < k$

$2 \le x < k \quad 2 \le y < k$

$P(x)$ vera $\quad P(y)$ vera

$x = p_1 \cdots p_r \quad y = q_1 \cdots q_s$

p_i, q_j primi

$$k = xy = p_1 \cdots p_r\, q_1 \cdots q_s \text{ è prodotto di primi}$$

Dim usando l'ind II forma

$P(n) \longleftrightarrow Q(n) = \{ P(k)$ è vera $\forall n_0 \le k \le n \}$

$Q(n) \Leftarrow$ dim con l'ind 1

L'ip b' su $P(n)$ equivale all' ip (b) su $Q(n)$

(a) $Q(2)$ vera $Q(2) = P(2)$

$Q(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

ogni numero $2 \le k \le n$ si fatt come prodotto di primi

(b) Se $Q(m-1)$ è vera $\Rightarrow Q(m)$ è vera $\Leftrightarrow$ tutti gli interi k $2 \le k \le m$ si fatt.

L'ip $Q(m-1)$ vera dice che $\forall k$ $2 \le k \le m-1$ si fattorizzano. Resta da vedere che m si fattorizza

m { primo ✓ ; non è primo $= xy$ $2 \le x < m$, $2 \le y < m$ }

$P(x)$ e $P(y)$ sono veri perché vale $Q(m-1)$

$x = p_1 \cdots p_r$ $y = q_1 \cdots q_s$ $\Rightarrow m = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$

Ind I $\Rightarrow$ Ind II

Si dimostra cambiando il predicato $P(n)$ in

$Q(n) = \{ P(k)$ è vera $\forall\, n_0 \le k \le n \}$

Assioma del buon ordinamento (PRINCIPIO DEL MINIMO)

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette un minimo.

L'assioma del buon ordinamento è equivalente all'induzione.

Dimostriamo che ogni intero ≥ 2 si fatt. come prodotto di primi usando l'assioma del b. ord.

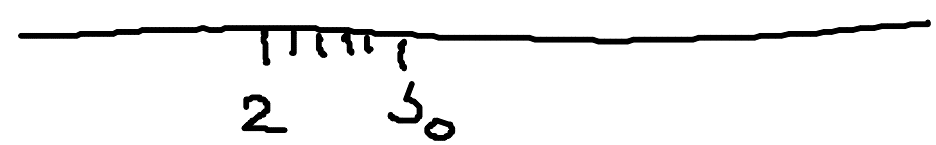
$$S = \{ n \geq 2 \mid n \text{ non è prodotto di primi} \}$$

La Tesi $S = \emptyset$

Per assurdo supponiamo $S \neq \emptyset$, $S \subset \mathbb{N} \Rightarrow$ vale il p del minimo quindi $\exists\, s_0 \in S$ t.c. s_0 è il minimo di S

$(s_0 \in S$ e $s_0 < s \ \forall s \in S)$

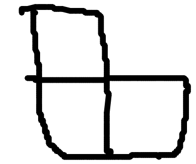
$s_0 > 2$ perché $2 \notin S$

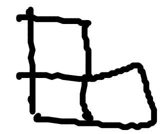


s_0 non è primo

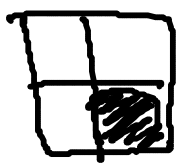
$s_0 = xy \qquad 2 \leq x < s_0 \qquad 2 \leq y < s_0 \qquad x, y \notin S$

x, y si fatt ..... s_0 si fatt $\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow S = \emptyset$

Esercizio: Dimostrare che è sempre possibile ricoprire una scacchiera $2^n \times 2^n$ con tessere  lasciando una sola casella libera.

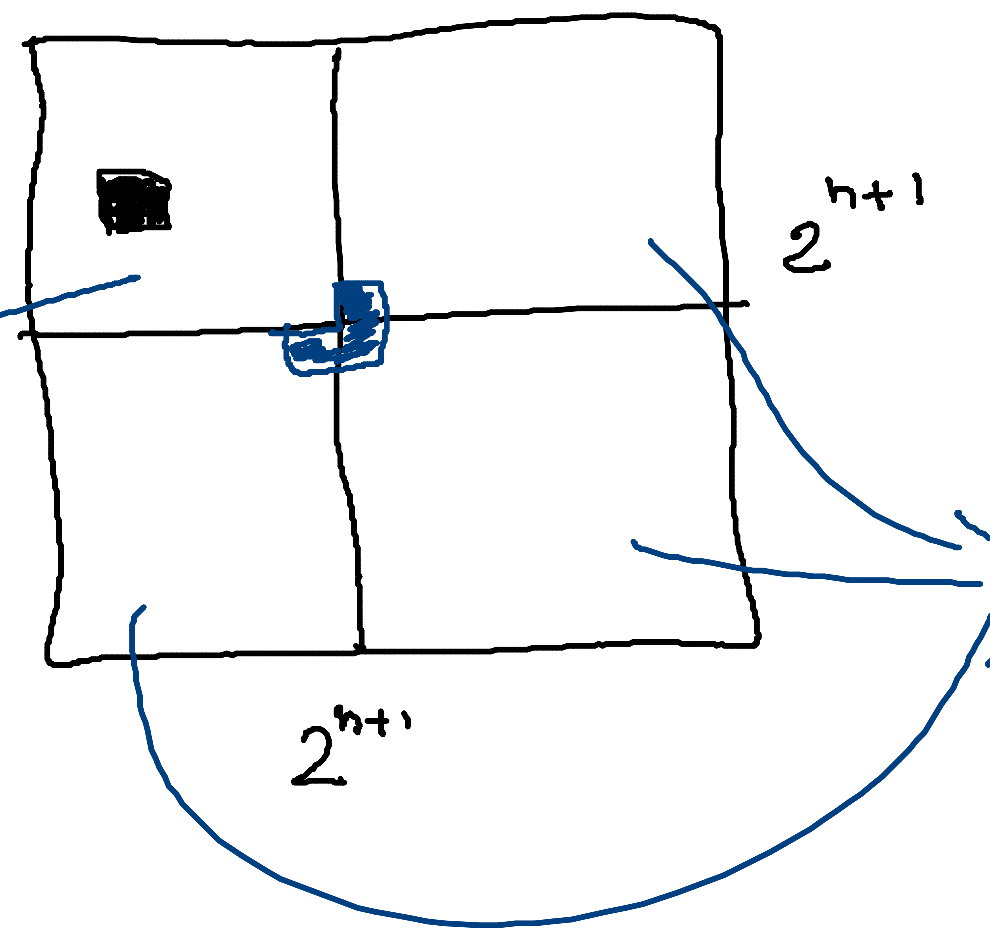
$\forall n \geq 1 \quad P(n) = \{$ scacchiera $2^n \times 2^n - 1$ tessera ricoperta con  $\}$

PASSO BASE

$P(1)$  ✓

PASSO IND

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$



4 scacchiere $2^n \times 2^n$

rientra nell'ip induttiva

$\Rightarrow$ posso ricoprirla 

una volta tolta la tessera anche queste caselle - - - -

$\Rightarrow$ Poi: _