Ilaria DEL CORSO – Giovanni GAIFFI

www.dm.unipi.it/~delcorso

Dispense Berarducci Gaiffi

Childs Algebra: un'introduzione concreta ETS

Insiemi:

$A = \{1, 2, 3, @, \square\}$ $\qquad$ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \le x \le 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{\mathbb{N}, \phi, \square, *, 9\}$

$D = \{1, 3, 5, \cancel{1}, 11\}$ $\qquad$ $|C| = \# C$ = cardinalità di C

numero di elementi

Differenza tra insiemi e stringhe

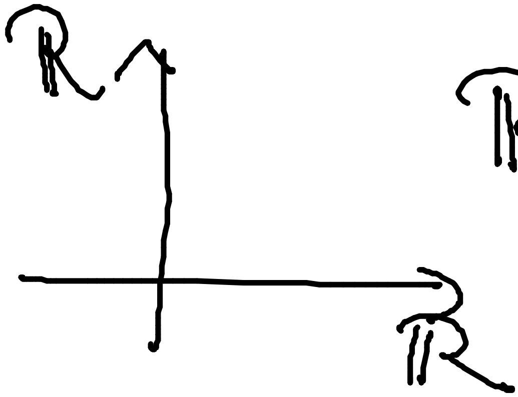
Una stringa è una lista ORDINATA di elementi

$(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$

$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$

Prodotto CARTESIANO

A, B insiemi $\qquad A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$B = \{0, 1\}$

$A \times B = \{(\alpha,0),\ (\alpha,1),\ (\beta,0),\ (\beta,1),\ (\gamma,0),\ (\gamma,1)\}$

	α	β	γ
0	·	·	·
1	·	·	·

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

n-upla = stringa di n elem.

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

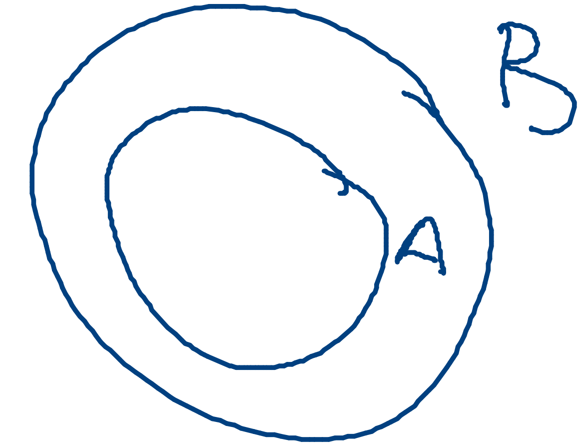
A, B insiemi

$A, B \subseteq \Omega$

$A \subseteq B$

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

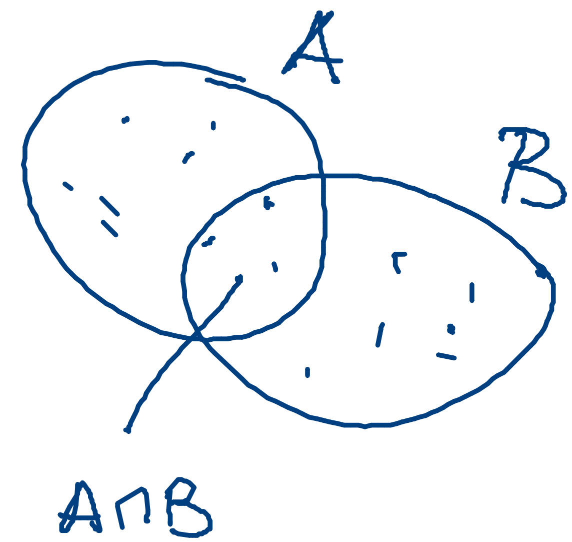
per ogni — appartiene

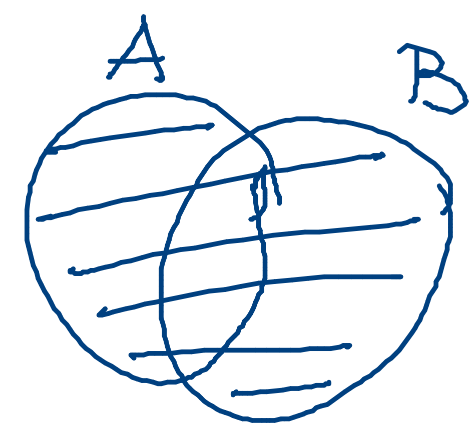


$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$A \cap B := \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B\}$

intersezione



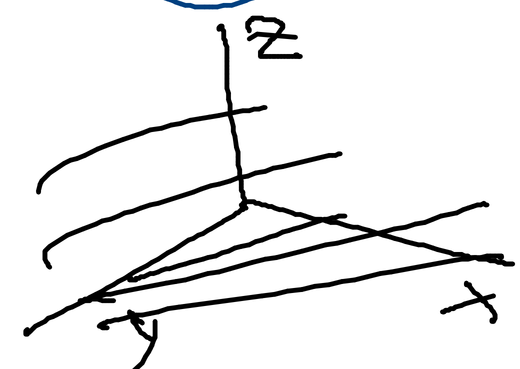


$A \cup B := \{x \in \Omega \mid x \in A \vee x \in B\}$

oppure

Oss: $\mathbb{R}^2$ $\quad$ $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$



$A \subseteq \Omega$

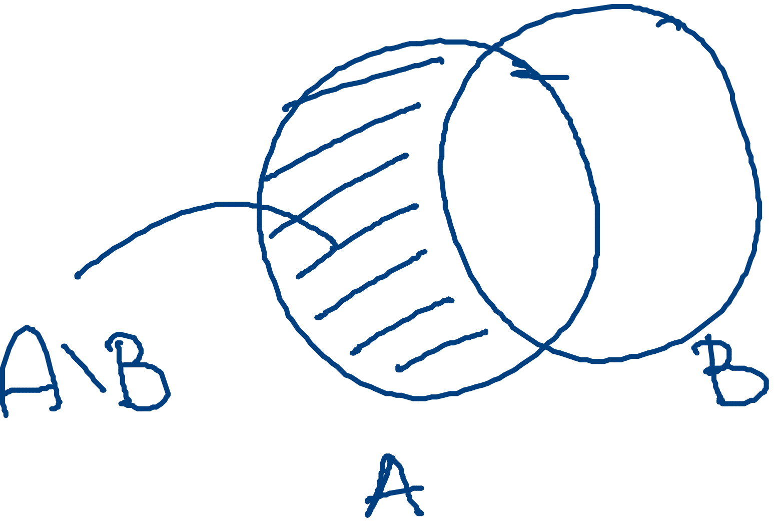
$A^c = \overline{A} := \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$

complementare di A in Ω

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$ $\quad \Omega = \mathbb{N}$

$A^c = \overline{A} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 0, x > 10\}$

$A, B \subseteq \Omega$ $\qquad A - B := \{x \in A \mid x \notin B\}$



$$A^c = \Omega \setminus A$$

Proprietà $\quad A, B, C \subseteq \Omega$

- Legge associativa $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

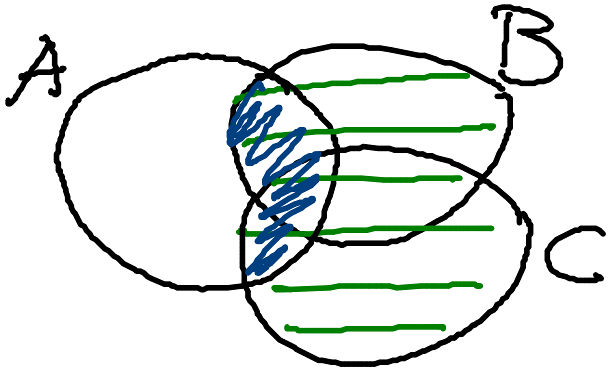
  $\qquad\qquad\qquad\qquad \cup \quad\ \ \cup \qquad\qquad \cup \quad\ \cup$

- Leggi DISTRIBUTIVE $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

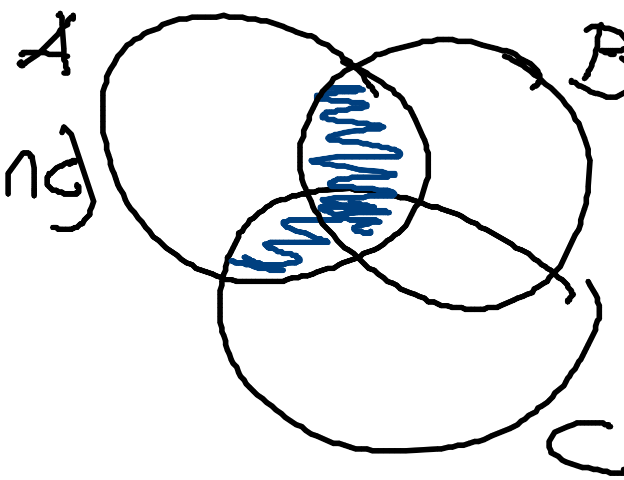
  Leggi DE MORGAN $\quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  $\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$x \in A \cap (B \cup C)$ $\quad x \in A \wedge (\underbrace{x \in B \cup C}_{(x \in B \vee x \in C)})$



Se $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\vee$ $\qquad \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$

$$\overline{(A\cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$x \in \overline{(A\cap B)} \iff x \in \Omega,\ x \notin A\cap B \iff$$

$$\overline{[x\in A \wedge x \in B]} \iff x \notin A \vee x \notin B$$

$$\iff x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A}\cup\overline{B}$$

$A \subseteq \Omega$

$$\mathcal{P}(A) := \{ X \subseteq \Omega \mid X \subseteq A \}$$

INSIEME DELLE PARTI DI A

$$A = \{1, a, \square\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \underbrace{\emptyset}_{\text{0 elem}}, \underbrace{\{1\}, \{a\}, \{\square\}}_{\text{1 el}}, \underbrace{\{1, a\}, \{1, \square\}, \{\square, a\}}_{\text{2 el}}, A \}$$

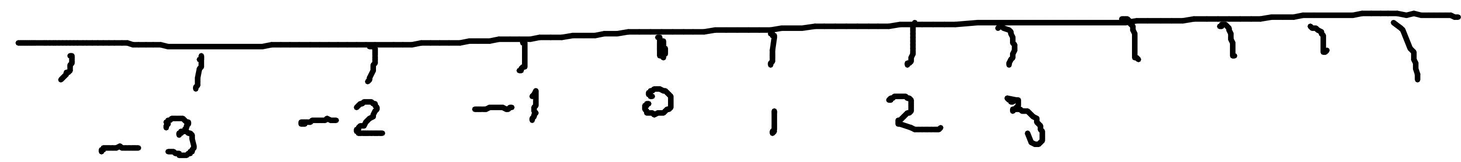
$1 \in \mathcal{P}(A)$? NO

$\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ sì

INDUZIONE

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\dots\}$ $\quad$ $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\dots\dots\}$

$\mathbb{N}, +, \cdot \quad \leq$



Quello che diremo per $\mathbb{N}$ vale per i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ inferiormente limitati (= che hanno minimo)

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq -720\}$

Esempio

FORMULA RICORSIVA

$0! = 1 \qquad (n+1)! = (n+1)\,n! \quad \forall n \geq 0$

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \cdot 0! \qquad 2! = 2 \cdot 1! = 2$

$3! = 3 \cdot 2! = 6 \qquad 4! = 4 \cdot 3! = 24$

$2^n \qquad 2^0 = 1 \qquad 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \quad \forall n \geq 0$

$\mathbb{N}$ - 0 è bianco

- se n è bianco $\Rightarrow$ n+1 è bianco

$\Rightarrow$ TUTTI I NUMERI NAT SONO BIANCHI

0 bianco $\Rightarrow$ 1 è bianco $\Rightarrow$ 2 bianco $\Rightarrow$ 3 bianco - - - - - -

Principio di induzione (1^a forma)

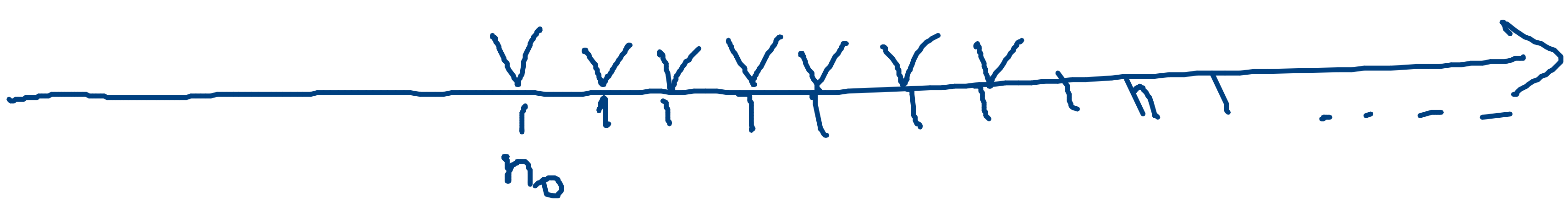
Sia $P(n)$ proprietà definita per $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che (a) $P(n_0)$ vera per $n_0 \in \mathbb{N}$ PASSO BASE

ESSI (b) $\forall n \geq n_0$ se $P(n)$ è vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ è vera

IPOTESI INDUTTIVA

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$ TESI



Esercizio

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

Dim per induzione:

a) $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ Vero

(b) Se $1 + \quad + n = \frac{n(n+1)}{2}$ per $n \geq 1 \Rightarrow$ vale per $n+1$

$$\underbrace{1 + \quad + n} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Per il principio di induzione la formula è vera $\forall n \geq 1$