Ricevimento Studenti ME 9 h 16 - 17,30 studio 204

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Calcolare la somma dei primi n numeri dispari.

$2k+1$

per ind su n

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = s_n = n^2} \; ?$$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = 1+3+5 = 9$

$S_4 = S_3 + 2\cdot 3+1 = 16$

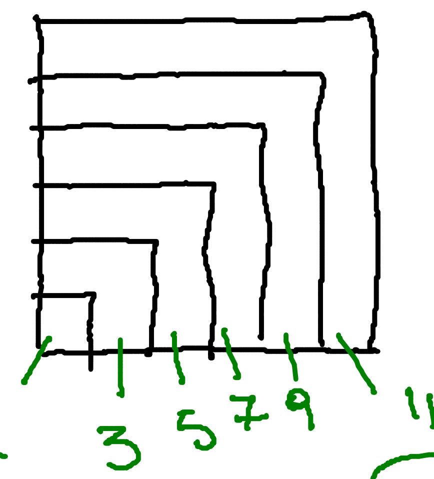
PASSO BASE $n=1$ $\quad 1 = 1^2$ ✓

Assumiamo la formula per n e dimostriamo

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \underline{\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)} + 2n+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

2ª dim $\quad 1+3+5+7+9+11 = 6^2$



3ª DIM:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} 2k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2\sum_{\substack{\cancel{k=0} \\ k=1}}^{n-1} k + n =$$

$$= 2\,\frac{(n-1)(n-\cancel{1+1})}{2} + n = (n-1)\,n + n = n(n-1+1) =$$

$$= n^2 \qquad \forall n \geq 1$$

Def. Una progressione aritmetica è una successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ tale che $\boxed{a_n - a_{n-1} = k \quad \forall\, n \geq 1}$

$\underline{a_0 = c}$

$a_1 - a_0 = k \quad a_1 = k + c \qquad a_2 - a_1 = k \quad a_2 = 2k + c \quad \ldots\ldots$

$\underline{a_n = nk + c} \qquad \forall\, n \geq 0$

Dimostro la formula per induzione su n

$n = 0 \qquad a_0 = 0k + c = c \quad \checkmark$

Ip ind $\quad a_n = nk + c \qquad\qquad \underline{a_{n+1}} = k + a_n = k + nk + c$

$= \underline{(n+1)k + c}$

$\Rightarrow$ la formula trovata è vera $\forall\, n \geq 0$

$a_i = ik + c \quad \forall i \geq 0$ $\qquad k, c \in \mathbb{R}$ costati

$$S_n = a_0 + \dots\dots + a_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} (ik + c) =$$

$$= k \sum_{i=0}^{n-1} \cancel{k} i + \sum_{i=0}^{n-1} c = k \frac{(n-1)n}{2} + nc =$$

$\forall n \geq 1$

$$= \frac{kn^2 + n(-1 + 2c)}{2} = \frac{(kn + 2c - 1)n}{2}$$

Def Una succ $\{b_n\}_{n\geq 1}$ è una progressione geometrica se il rapporto $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q \leftarrow$ costante $n \geq 1$

Per assegnare una progressione geometrica basta assegnare il valore iniziale $b_0 = c \neq 0$ e la ragione q $q, c \in \mathbb{R}$

$b_0 = c \neq 0$ $b_1/b_0 = q$ $b_1 = q\, b_0 = q\, c$

$b_2 = q\, b_1 = q^2 c$ ...... $b_n = q^n c$

Calcoliamo $\quad S_n = b_0 + \dots + b_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i =$

$b_i = q^i c \qquad = \sum_{i=0}^{n-1} c q^i = c \sum_{i=0}^{n-1} q^i = c\,\frac{q^n - 1}{q-1} \qquad q \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$$ ← DIMOSTRO per INDUZIONE $\forall n \geq 1$

$n=1 \quad 1 = \frac{q-1}{q-1} = 1$, assumiamo il risultato vero per n e dimostriamo $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1}$ ✓

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i + q^n = \frac{q^n - 1}{q-1} + q^n = \frac{q^n - 1 + q^n(q-1)}{q-1} =$$

$$= \frac{q^{n+1} - \cancel{q^n} + \cancel{q^n} - 1}{q-1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1}$$ ok $\forall n \geq 1$

Esercizio: Dim che $\forall n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

<u>PASSO BASE</u> $n=1$ $\quad \frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$ ok perché $1=1$

PASSO INDUTTIVO ASSUMO la formula per n e dimostro

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$$

voglio dire che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} \iff$$

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} \iff \sqrt{n+1}\sqrt{n} + 1 \geq \sqrt{n+1}\ \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n(n+1)} + \cancel{1} \geq n + \cancel{1}$$

$$\sqrt{n^2+n} \geq \sqrt{n^2} = n \leftarrow \text{è vero } \forall n \geq 0$$

è vero

$\Rightarrow$ ok $\forall n \geq 1$

Esercizio: $\forall n \geq 14 \quad n = 3x + 8y$ ha soluzione $x, y \in \mathbb{N}$

$n = 14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \quad x=2 \; y=1$ ok

$n = 15 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 0 \quad x=5 \; y=0$ ok

$n = 16 = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 2$

$3 \cdot 3 + 8 \cdot 1$

$17 = 14 + 3 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 3$

$18 = 15 + 3$

$19 = 16 + 3$

$n \Rightarrow n+1$ So che $n = 3x_n + 8y_n \quad x_n, y_n \geq 0$

$$n+1 = 3x_n + 8y_n + 1 = 3x_n + 8y_n + 3 \cdot 3 + 8(-1)$$

$$= 3\underbrace{(x_n + 3)}_{\geq 0} + 8\underbrace{(y_n - 1)}_{\geq 0\ ?}$$

$$n+3 = 3x_n + 8y_n + 3 = 3\underbrace{(x_n + 1)}_{\geq 0} + 8\underbrace{y_n}_{\geq 0}$$

Formalizziamo:

PASSI BASE $n = 14, \; n = 15 \quad n = 16$ ok già controllati

PASSO INDUTTIVO $n > 16 \quad \forall \; \underline{14 \leq k < n} \quad P(k)$ vero

$P(k) \quad k = 3x_k + 8y_k \quad x_k, y_k \geq 0$

Dimostro $P(n) \quad n = n - 3 + 3 \quad \boxed{n - 3 \geq 14}$ $P(n-3)$ è vera

$$= 3x_{n-3} + 8y_{n-3} + 3 = 3\underbrace{(x_{n-3} + 1)}_{\geq 0} + 8\underbrace{y_{n-3}}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow P(n)$ è vera. Per induzione 2 la tesi è vera $\forall n \geq 14$

Esercizio (disuguaglianza di Bernoulli)

$\forall n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x > -1$ si ha $\boxed{(x+1)^n \geq 1 + nx}$

Per induzione I:

PASSO $n=0$ $\quad (1+x)^0 \geq 1 + 0x \quad$ ✓

PASSO INDUTTIVO $\quad (1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$

ip induttiva + $(1+x) > 0$

$$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + x(n+1) + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x$$

$\Rightarrow$ la disug è vera $\forall n \geq 0$