$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ $\quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \forall n \geq 2$ SUCC DEF PER RICORRENZA

SUCCESSIONE di FIBONACCI

Relazione con induzione II

$F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ $F_6 = 8$ ....

$F_{150} =$ si può calcolare ma è lungo - Sarebbe comodo avere una formula esplicita

Esempio $a_0 = 1$ $\quad a_n = 2\, a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 2^2 \qquad a_3 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$

$$\boxed{a_n = 2^n \quad \forall n \geq 0}$$ ← Verifico per induz

Cerchiamo una possibile sol di tipo α^n della relazione di ricorrenza $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$F_n = \alpha^n$?

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1} \qquad \alpha \neq 0$$

divido per α^{n-1}

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ radici}$$

$\Rightarrow$ La rel di ricorrenza $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ha come sol exp α^n, β^n

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ né α né β vanno bene

$\underline{\lambda \alpha^n + \mu \beta^n}$ verifica la rel di ricorrenza $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$$
$$\beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}$$

$$\underbrace{\lambda \alpha^{n+1} + \mu \beta^{n+1}}_{n+1} = \underbrace{\lambda \alpha^n + \mu \beta^n}_{n} + \underbrace{\lambda \alpha^{n-1} + \mu \beta^{n-1}}_{n-1}$$

$$C_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

$n=1 \qquad 1$

$n=2 \qquad 1$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

IMPONGO LE COND. INIZIALI:

$$\begin{cases} \lambda\alpha + \mu\beta = 1 \\ \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}(1 - \mu\beta)$$

$$\alpha(1-\mu\beta) + \mu\beta^2 = 1$$

$$\mu(\beta^2 - \alpha\beta) = 1 - \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta \qquad \mu = \frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{2}{2\sqrt{5}}$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \dots \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1$$

$a_n = c_k a_{n-k} + \underbrace{\qquad\qquad}\; + c_1 a_{n-1}$ ← rel di ricorrenza lineare a coefficienti cost.

E

$k=3$ $\quad a_1 = a_{1-3}$

$a_0 ; a_1, a_2, \quad a_3 = c_3 a_0 + c_2 a_1 + c_1 a_2$ $\qquad$ CERCARE IL TERMINE GENERALE

$a_0 = 4 \quad a_1 = 22 \quad a_2 = 82$ $\qquad \boxed{a_n = 6a_{n-1} - 11 a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad \forall n \geq 3}$ $*$

Cerco sol α^n della rel di ricorrenza $\qquad \alpha^n = 6\alpha^{n-1} - 11\alpha^{n-2} + 6\alpha^{n-3}$

$$\alpha^3 = 6\alpha^2 - 11\alpha + 6$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\;\; \shortparallel$

$(x-1)(x-2)(x-3)$

$\alpha = 1 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 3$

$\alpha^n \quad \beta^n \quad \gamma^n$ non verificano le cond iniziali

$\forall \lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R} \qquad \lambda 1^n + \mu 2^n + \eta 3^n = x_n$ è sol x_n

verificano tutte la rel. di ricorrenza

$x_n = \lambda 1^n + \mu 2^n + \eta 3^n$ $\exists \lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ t.c. che x_n verifica anche le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu + \eta = 4 \\ x_1 = \lambda 1 + \mu \cdot 2 + \eta 3 = 22 \\ x_2 = \lambda 1^2 + \mu 2^2 + \eta 3^2 = 82 \\ \vdots \end{cases}$$

$\lambda = \ldots$

$\mu = \ldots$

$\eta = \ldots$

Vedremo che la matrice dei coeff del sistema è una matrice di VANDERMONDE $\Rightarrow$ IL SISTEMA SI RISOLVE SEMPRE

Generalizziamo: Se abbiamo una succ definita per ricorrenza da una rel di ricorrenza lineare a coeff costanti, per trovare il termine generale faccio così:

. Scrivo il polinomio associato alla rel di ricorrenza

. ~~Trovo le~~

- Cerco le radici di questo polinomio

Se il polinomio ha grado k e k radici distinte

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \alpha_1^n + \ldots + \lambda_k \alpha_k^n = X_n$

verifica la rel di ricorrenza

Imponendo le condizioni iniziali ricavo i valori di $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ che danno la succ. cercata. (Il sistema che devo risolvere ha sempre sol perché la matrice dei coeff è di Vandermonde)

$(x-1)^2$ ha 2 radici coincidenti

ha una radice di molt 2

Esercizio

$F_1 = F_2 = 1$

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

a) $F_1 + F_3 + \ldots\ldots + F_{2n-1} = F_{2n} \qquad \forall n \geq 1$

b) $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \forall n \geq 1$

a) Per induzione

PASSO BASE $\quad n=1 \quad F_1 = F_2$ ✓

PASSO INDUTTIVO supporgo vero la rel in (a) a livello k $\forall \; 1 \leq k < n$ e la dimostro per n

$$\underbrace{F_1 + \ldots + F_{2(n-1)-1}} + F_{2n-1} = F_{2(n-1)} + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \forall n \geq 1$$

$n=1$ $\quad F_3 F_1 - F_2^2 = (-1)^2 \qquad F_1 = F_2 = 1 \quad F_3 = 2$

$2 \cdot 1 - 1 = 1$ ✓

PASSO INDUTTIVO INDUZIONE I suppongo vera la tesi per n e la dimostro per $n+1$

$n+1$ $\quad F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \stackrel{?}{=} (-1)^{n+1}$

$$(F_{n+1}+F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1})$$

$$\cancel{F_{n+1}F_n} + F_n^2 - \cancel{F_{n+1}F_n} - F_{n+1}F_{n-1} = -(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) =$$

$$= -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Esercizio

$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad \forall n \geq 0$

a) $\forall n \geq 1 \quad 2^n \mid a_n + 3$ (b) Trovare formula per a_n

a) Per induzione : $n = 1 \quad 2 \mid a_1 + 3 = 2a_0 + 3 + 3 = 8$ ✓

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\quad \underline{2^{n+1} \mid a_{n+1} + 3} = 2a_n + 6 = 2(a_n + 3) =$

$= 2\,(2^n c) =$

$\underline{2^{n+1} c}$

$2^n \mid a_n + 3 = 2^n c$

$a_{n+1} = 2a_n + 3$ $\qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 5 \qquad a_2 = 13 \qquad a_3 = 29$

$$a_1 = 2a_0 + 3 = 2 + 3 = 5 = 8 - 3$$

$$a_2 = 2(2+3) + 3 = 2^2 + 3^2 = 16 - 3$$

$$a_3 = 2\left(2(2+3)+3\right) + 3 = 2(2^2 + 3^2) + 3$$
$$2^3 + 2\,3^2 + 3 = 2^3 + 3 \cdot 7 = 32 - 3$$

$a_n = 2^{n+2} - 3$ $\leftarrow$ IPOTESI La mostro per induzione