Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Primo compitino - 13/12/2013

Esercizio 1. Si considerino, al variare di $h \in \mathbb{R}$, i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$V_h = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x - 3y + t = 0, hx - hy - z = 0\},$$
$$W = Span((1,2,0,-1),(2,0,1,1),(1,6,-1,-4)) \;.$$

a) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus W$.

b) Posto $E_h = \{f \in End(\mathbb{R}^4) \mid f(V_h) \subseteq W, f(W) \subseteq V_h\}$, si verifichi che E_h è un sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{R}^4)$ e si determinino i valori di di $h \in \mathbb{R}$ per cui la dimensione di E_h è dispari.

Esercizio 2. Sia $V = M(2,\mathbb{R})$. Per ogni $A \in V$ e $B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ si considerino le applicazioni lineari

$$f_A \colon V \to V\,, \quad f_A(X) = AX + XA\,,$$
$$g_B \colon V \to V\,, \quad g_B(X) = BXB^{-1}\,.$$

a) Si mostri che $f_{B^{-1}AB} = g_{B^{-1}} \circ f_A \circ g_B$ per ogni $A \in V$ e $B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

b) Si mostri che, se A è diagonalizzabile, allora f_A è diagonalizzabile.

c) Fissata $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si determini, se esiste, una base di V formata da autovettori per f_A; altrimenti si determini, se esiste, una base di V a bandiera per f_A.

Esercizio 3. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(i) Sia V uno spazio vettoriale con $\dim V \geq 2$. Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo invertibile e sia W un sottospazio vettoriale di V f-invariante. Allora esiste un sottospazio vettoriale U di V f-invariante e tale che $V = U \oplus W$.

(ii) Sia $n \geq 2$. Sia $A \in M(n,\mathbb{R})$ una matrice triangolare superiore in cui gli elementi sulla diagonale principale sono numeri non negativi, a due a due distinti. Allora esiste $B \in M(n,\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

<u>Soluzioni</u>

Esercizio 1.

a) $V_h = \mathrm{Ker}\, A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ h & -h & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\mathrm{rk}\, A = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, allora $\dim V_h = 2 \;\; \forall h \in \mathbb{R}$. Inoltre si verifica facilmente che $(1,6,-1,-4) \in Span((1,2,0,-1),(2,0,1,1)$; dunque $W = Span((1,2,0,-1),(2,0,1,1))$ e $\dim W = 2$.

Pertanto $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus W$ se e solo se $V_h \cap W = \{0\}$.

Il generico vettore di W è del tipo $a(1,2,0,-1) + b(2,0,1,1) = (a+2b, 2a, b, b-a)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. Quindi

$$V_h \cap W = \{(a+2b, 2a, b, b-a) \mid -5a + 5b = 0, -ha + b(2h-1) = 0, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Poiché $\det\begin{pmatrix}-5 & 5\\ -h & 2h-1\end{pmatrix} = 5(1-h)$, risulta che $V_h \cap W = \{0\}$ se e solo se $h \neq 1$.

b) Evidententemente $0 \in E_h$. Se $f, g \in E_h$ allora $f(V_h) \subseteq W, f(W) \subseteq V_h, g(V_h) \subseteq W, g(W) \subseteq V_h$. Di conseguenza $(f+g)(V_h) \subseteq f(V_h) + g(V_h) \subseteq W$ e $(f+g)(W) \subseteq f(W) + g(W) \subseteq V_h$. Similmente si verifica che $af \in E_h \ \ \forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in E_h$.

Se $h \neq 1$ dal punto a) sappiamo che $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus W$. Se $\mathcal{B}_1$ è una base di V_h e $\mathcal{B}_2$ è una base di W, allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Sia $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\colon End(\mathbb{R}^4) \to M(4,\mathbb{R})$ l'isomorfismo che associa ad ogni $f \in End(\mathbb{R}^4)$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$. Se $f \in E_h$ si ha che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$ con $A, B \in M(2,\mathbb{R})$. Più precisamente

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(E_h) = \{\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix} \mid A, B \in M(2,\mathbb{R})\}.$$

Poiché $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}|_{E_h}\colon E_h \to \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(E_h)$ è un isomorfismo, allora $\dim E_h = \dim \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(E_h) = 8$.

Se $h = 1$, dal punto a) risulta che $\dim(V_1 \cap W) = 1$. Possiamo scegliere una base $\mathcal{B} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\{z_1\}$ è una base di $V_1 \cap W$, $\{z_1, z_2\}$ è una base di V_1 e $\{z_1, z_3\}$ è una base di W. In tal caso se $f \in E_1$ si ha che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_4 & a_6\\ 0 & 0 & a_5 & a_7\\ 0 & a_3 & 0 & a_8\\ 0 & 0 & 0 & a_9\end{pmatrix}$.
Pertanto, ragionando come prima, si ha che $\dim E_1 = \dim \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(E_1) = 9$.

Di conseguenza l'unico valore di h per cui E_h ha dimensione dispari è $h = 1$.

Esercizio 2.

(a) Per ogni $X \in V$ si ha

$$\begin{aligned} g_{B^{-1}}(f_A(g_B(X))) &= g_{B^{-1}}(f_A(BXB^{-1})) = g_{B^{-1}}(ABXB^{-1} + BXB^{-1}A)\\ &= B^{-1}(ABXB^{-1} + BXB^{-1}A)B = B^{-1}ABX + XB^{-1}AB = f_{B^{-1}AB}(X)\ , \end{aligned}$$

da cui la tesi.

(b) Se A è diagonalizzabile, allora esiste $B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ tale che

$$D = BAB^{-1} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$$

Siano E_{ij}, $i, j, \in \{1,2\}$, le matrici della base standard di V. È allora immediato verificare che $f_D(E_{11}) = 2\lambda E_{11}$, $f_D(E_{12}) = (\lambda+\mu)E_{12}$, $f_D(E_{21}) = (\lambda+\mu)E_{21}$, $f_D(E_{22}) = 2\mu E_{22}$, per cui f_D è diagonalizzabile. D'altronde si ha $g_{B^{-1}} \circ g_B = g_B \circ g_{B^{-1}} = \mathrm{Id}_V$, per cui g_B è invertibile e $g_B^{-1} = g_{B^{-1}}$. Per quanto visto in (a), f_A e f_D sono dunque coniugate. Poiché f_D è diagonalizzabile, se ne deduce che anche f_A è diagonalizzabile, come voluto.

(c) Un facile calcolo mostra che $f_A(E_{11}) = 2E_{11} + E_{12}$, $f_A(E_{12}) = 2E_{12}$, $f_A(E_{21}) = E_{11} + 2E_{21} + E_{22}$, $f_A(E_{22}) = E_{12} + 2E_{22}$, per cui, se $\mathcal{B}$ è la base standard di V, allora

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di M è $(t-2)^4$, per cui f_A ha il solo autovalore 2, che ha molteplicità algebrica 4. Se anche la molteplicità geometrica di 2 fosse uguale a 4, allora f_A dovrebbe essere uguale a $2\,\mathrm{Id}_V$, e M dovrebbe essere uguale a 2 volte la matrice identità. Poiché così non è, f_A non è diagonalizzabile.

Cerchiamo una base a bandiera per M. Calcolando $\ker(M - 2\,\mathrm{Id})$ si vede facilmente che l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica uguale a 2, ed una base dell'autospazio relativo è data da $(e_2, e_1 - e_4)$. Possiamo completare questo sistema indipendente a base di $\mathbb{R}^4$ ottenendo, per esempio, $\mathcal{C} = (e_2, e_1 - e_4, e_1, e_3)$. Poiché $M(e_1) = e_2 + 2e_1$, tale base è a bandiera per M. Dunque una base a bandiera per f_A è data dagli elementi di V le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono rispettivamente $e_2, e_1 - e_4, e_1$ ed e_3. Ricapitolando, una base a bandiera per f_A è data da E_{12}, $E_{11} - E_{22}$, E_{11} e E_{21}.

Esercizio 3.

(i) L'asserzione è falsa. Sia infatti $V = \mathbb{R}^2$, $W = Span(e_1)$ e f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora f è invertibile e W è f-invariante. D'altra parte se esistesse un supplementare U di W (ossia una retta per l'origine diversa dall'asse x) f-invariante, allora f sarebbe diagonalizzabile, mentre non lo è.

(ii) L'asserzione è vera. Infatti A è diagonalizzabile, visto che per ipotesi i suoi autovalori sono a due a due distinti; dunque esiste $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM = D$ con D matrice diagonale. Poiché gli elementi sulla diagonale di D coincidono con gli autovalori di A e dunque sono numeri reali non negativi, esiste una matrice diagonale $\widetilde{D}$ tale che $\widetilde{D}^2 = D$. Allora $A = MDM^{-1} = M\widetilde{D}^2M^{-1} = M\widetilde{D}M^{-1}M\widetilde{D}M^{-1}$. Pertanto la matrice $B = M\widetilde{D}M^{-1}$ soddisfa la tesi.