Compitino di MD
3 novembre 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Dimostro l'uguaglianza per induzione su n.

Passo base: $n = 1$ $\quad \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ è verificato

Passo induttivo: Suppongo che la tesi sia vera per un $n \geq 1$ e la dimostro per $n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\underset{\text{ip ind}}{=} \frac{n}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

questo dimostra il passo $n+1$, quindi per il p. di induzione l'uguaglianza è vera $\forall n \geq 1$

Esercizio 2. Trovare una formula (non ricorsiva) per il termine a_n della seguente successione definita per ricorrenza: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, e, per ogni $n \geq 2$,

$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2}$$

La relazione di ricorrenza è lineare a coeff. costanti. Cerchiamo quindi le sol esponenziali:

$$x^n = 2x^{n-1} + 7x^{n-2}$$

Dividendo per x^{n-2} (~~0~~ non ~~assolve~~ verifica le condizioni iniziali) si ottiene

$$x^2 - 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{8}.$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{8} = 1 - 2\sqrt{2} \qquad \beta = 1 + \sqrt{8} = 1 + 2\sqrt{2}$$

Dalla Teoria sappiamo che

$$a_n = a\,\alpha^n + b\,\beta^n$$

verifica la rel di ricorrenza $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo per quali a e b sono verificate le condizioni iniziali

$$a_0 = a + b = 0$$

$$a_1 = a\alpha + b\beta = 1$$

$$\begin{cases} a = -b \\ b(-\alpha + \beta) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ b(2\sqrt{8}) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\ b = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_n = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - 2\sqrt{2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2}) \quad n \geq 0}$$

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione con le congruenze:

$$104x \equiv 28 \qquad (62)$$

Dividiamo tutto per 2:

$52x \equiv 14 \quad (31)$

$21x \equiv 14 \quad (31)$

$-10x \equiv 14 \quad (31)$

$(3,31) = 1$ e $3(-10) \equiv -30 \equiv 1 \quad (31)$

↓ moltiplico per 3

$x \equiv 14 \cdot 3 \equiv 42 \equiv 11 \quad (31)$

Es 4:

$b_0 = 1$

$b_n = 2b_{n-1} + 7 \qquad \forall n \geq 1$

TROVARE UNA FORMULA ESPLICITA

$b_1 = 2 \cdot 1 + 7 = 9$

$b_2 = 2 b_1 + 7 = 2(2+7)+7 = 2^2 + 2 \cdot 7 + 7$

$b_3 = 2(2^2 + 2 \cdot 7 + 7) + 7 = 2^3 + 2^2 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 7$

Congettura $b_n = 2^n + 2^{n-1} 7 + \dots + 2 \cdot 7 + 7 =$

$= 2^n + 7(2^{n-1} + \quad + 2 + 1) =$

$= 2^n + 7(2^n - 1) = 8 2^n - 7 =$

$= 2^{n+3} - 7$

$x^{n-1} + \dots + x + 1 = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

Verifico per induzione la formula congetturata

$b_n = 2^{n+3} - 7$

$b_0 = 2^3 - 7 = 1 \quad$ V

Suppongo vera la Tesi per b_n ($b_n = 2^{n+3} - 7$) $n \geq 1$

e dimostro che $b_{n+1} = 2^{n+1+3} - 7 = 2^{n+4} - 7$

Infatti $b_{n+1} = 2b_n + 7 = 2(2^{n+3} - 7) + 7 =$

$= 2^{n+4} - 2 \cdot 7 + 7 =$

$= 2^{n+4} - 7 \quad \checkmark$

Per induzione ~~la formula~~ abbiamo mostrato che $b_n = 2^{n+3} + 7 \quad \forall n \geq 1$