
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
12/09/2024

Il punto con l'asterisco è opzionale

Esercizio 1. Sono date le funzioni $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ e $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{3x - 2}$.

- (a) Si dica quante e quali sono le soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$ e dell'equazione $x = g(x)$.
- (b) Si studi la convergenza, compresa la scelta del punto iniziale e l'ordine di convergenza, del metodo delle tangenti alle soluzioni di $f(x) = 0$.
- (c) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ alle soluzioni di $x = g(x)$.
- (d) Si confrontino le proprietà di convergenza dei due metodi alle soluzioni che le due equazioni hanno in comune.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita come

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{se } i = j, i = 1, 2, \dots, n \\ 1 & \text{se } j = 1, i = 2, \dots, n \\ i & \text{se } j = n, i = 1, \dots, n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ad esempio per $n = 5$ la matrice risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) Si dimostri, osservando prima sul caso $n = 5$ e generalizzando poi per n generico che A ha come autovalori gli interi $2, 2, \dots, n - 1$ e che gli altri due autovalori sono gli autovalori della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n \end{bmatrix}$.
- (b) Si dica se la matrice di dimensione n è fattorizzabile LU e se ne scrivano i fattori L e U .
- (c) Si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel.
- (d) Si scriva una funzione Matlab `function xnew=gs_step(xold, b)` che esegue un passo del metodo di Gauss-Seidel a partire dal vettore `xold`. La funzione deve avere costo lineare e non richiedere la memorizzazione della matrice A o della matrice di iterazione.