Calcolo Numerico
Foglio di esercizi sull'analisi dell'errore

Gianna Del Corso <gianna.delcorso@unipi.it>

Febbraio 2025

Esercizio 1. Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $F(10, 3, 7, 6)$ in cui si assume di operare con troncamento.

(a) Assegnato $x = 2022$, se ne calcoli la rappresentazione $\tilde{x} \in F$.

(b) Si determinino tutti i numeri reali tali che la loro rappresentazione in F coincida con $\tilde{x}$,

c) Si calcoli la precisione di macchina u e si determinino due numeri $z \in F$ tali che $\frac{|z-x|}{|x|} < u$.

Esercizio 2. Si considerino i due insiemi $F(10, t, m, M)$ con $t = 3, m = 4, M = 5$ e G definito come l'unione di F con l'nsieme dei numeri non nulli della forma $x = \pm 10^{-m}(0.0d_2, \ldots, d_t)$, con $0 \leq d_i \leq 9$ per i=2, ..., t (quindi G contiene anche numeri piccoli non normalizzati).

(a) Si calcolino i minimi positivi non nulli ω e i massimi Ω degli insiemi F e G.

(b) Si determinino le cardinalità degli insiemi F e G.

c) Quale errore relativo di rappresentazione si commette volendo rappresentare $1.4\,10^{-(t+m)}$ in F e in G.

Esercizio 3. (*) Sia $fl(x)$ la rappresentazione, ottenuta per troncamento, nell'insieme $F(10, 3, m, M)$ di un numero $x \in \mathbb{R}$.

(a) Dimostrare che $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $0 < x_1 \leq x_2$ implica $fl(x_1) \leq fl(x_2)$.

(b) Dimostrare con un opportuno esempio che $fl(x_1) \leq fl(x_2)$ non implica che $x_1 \leq x_2$.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ con $m = M$.

a) Si dica quali sono il minimo numero positivo ω ed il massimo numero positivo Ω di $\mathcal{F}$.

b) Si dica, giustificando la risposta, se i numeri $b = 1/\omega$ e $B = 1/\Omega$ appartengono a $\mathcal{F}$.

c) Si esamini in particolare il caso $\beta = 2, t = 8$ ed $m = M = 6$.

Esercizio 5. (*) Si dica quale è il più grande intero N tale che tutti gli interi nell'intervallo $[-N, N]$ sono rappresentabili esattamente in $\mathcal{F}(2, t, m, M)$. Quale è il valore di N corrispondente per l'aritmetica IEEE in doppia precisione?

Esercizio 6. Sia $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

(a) Si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$.

(b) Si fornisca un algoritmo per il calcolo di $f(x)$ e se ne studi la stabilità.

(c) È noto che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Per $n = 10^8$ ed $n = 10^9$ si consideri la somma parziale $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ e si confrontino i valori ottenuti utilizzando con Matlab implementando due differenti algoritmi di somma (dal termine più piccolo a quello più grande e viceversa) e si confrontino gli errori relativi ottenuti con i due programmi.

Esercizio 7. Quale delle due espressioni equivalenti (dal punto di vista matematico)

$$\frac{1 - x^4}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3$$

è più stabile? Si studi anche il condizionamento del calcolo dell'espressione precedente.

Esercizio 8. (*) Per un qualsiaiasi $x > 0$ si dica quanto dovrebbe valere x dopo aver eseguito il seguente frammento di programma

```
for k=1:60
       x=sqrt(x);
end
for k=1:60
       x=x*x;
end
```

Si esegua questo script in Matlab e si veda quale valore assume x alla fine del programma e si cerchi di dare una motivazione del risultato ottenuto.

Esercizio 9. Si vuole calcolare il valore del polinomio

$$p(x) = x^n + 2x^{n-1} + 2^2x^{n-2} + ... + 2^{n-1}x + 2^n, \quad n > 1,$$

con il metodo di Ruffini-Horner, ovvero utilizzando l'algoritmo indiviaduato nels egiente modo:

$$p(x) = x(x(x(\cdots(x+2)+4)\cdots) + 2^{n-1}) + 2^n,$$

per $0 < x < 1$.

a) Si studi l'errore algoritmico per il caso $n = 3$, in cui $p(x) = x(x(x+2)+4)+8$.

b*) Si studi l'errore algoritmico per n generico.