

Calcolo Numerico

Foglio di esercizi su risoluzioni di sistemi lineari con metodi iterativi

Gianna Del Corso <gianna.delcorso@unipi.it>

Marzo 2023

Esercizio 1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si consideri la decomposizione additiva $A = M - N$ con

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i = j \text{ oppure } i = j + 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema $Ax = b$ si consideri il metodo iterativo $x^{(k)} = Px^{(k-1)} + q$ con $P = M^{-1}N$ e $q = M^{-1}b$.

1. Si descriva il metodo iterativo in termini di componenti.
2. Si dimostri che la predominanza diagonale è condizione sufficiente per la convergenza

Esercizio 2. Si determini una condizione necessaria e sufficiente sul parametro reale k per la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ k & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e $b \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita in termini del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ come

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ \alpha & \text{se } i = j + 1 \text{ oppure } i = 1 \text{ e } j = n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si diano condizioni sufficienti per la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel.

2. Dette J_A e G_A le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati ad A . Si dimostri che $\rho(G_A) = [\rho(J_A)]^n$.
3. Si dimostri invece che per la matrice trasposta vale $[\rho(G_{A^T})]^{n-1} = [\rho(J_{A^T})]^n$.
4. Si diano quindi le condizioni sul parametro α per la convergenza dei due metodi.
5. Si scriva una funzione Matlab che implementa il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema $Ax = b$. La funzione prende in input il parametro α , il vettore dei termini noti b , e calcola la successione dei vettori $x^{(k)}$ arrestandosi quando $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \leq 10^{-12}$ o se sono state effettuate 100 iterazioni. La funzione deve avere un costo lineare per iterazione, non richiedere la memorizzazione di A e restituire il residuo $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$, il vettore $x^{(k)}$ ed il valore k .

Esercizio 4. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si dimostri che se $\det(A) = 0$ allora ogni metodo iterativo basato sulla decomposizione di $A = M - N$ con M invertibile è tale per cui la matrice P ha un autovalore uguale a 1 e quindi non possiamo avere convergenza di nessun metodo di questo tipo se applicato a una matrice singolare.

Esercizio 5. Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = 1, j = n \text{ o } i = n, j = 1; \\ \alpha + 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } j = i + 1 \text{ o } j = i - 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini i valori del parametro α per cui A risulta predominante diagonale.
2. Si verifichi che il vettore di componenti $v_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ è un autovettore della matrice di iterazione del metodo di Jacobi.
3. Si determini i valori del parametro α per cui il metodo di Jacobi applicato ad A risulta convergente.
4. Si scriva un programma MatLab che dato in input $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $itmax \in \mathbb{N}$ calcola la successione generata dal metodo di Jacobi con vettore iniziale nullo applicato per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ arrestandosi quando $\|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq 1.0e-6$ o $k > itmax$ e restituendo in uscita la coppia x_k, k . Per $b = \mathbf{ones}(100, 1)$, $itmax = 100$ e $\alpha = 2$ riportare il valore di k restituito dal programma.