Calcolo Numerico

Soluzioni del Foglio di Esercizi 3

Gianna Del Corso <gianna.delcorso@unipi.it>

Aprile 2023

Esercizio 1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si consideri la decomposizione additiva $A = M - N$ con

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i = j \text{ oppure } i = j + 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema $Ax = b$ si consideri il metodo iterativo $x^{(k)} = Px^{(k-1)} + q$ con $P = M^{-1}N$ e $q = M^{-1}b$.

1. Si derivi il metodo iterativo in termini di componenti.
2. Si dimostri che la predominanza diagonale è condizione sufficiente per la convergenza

Soluzione 1. 1. Dal fatto che $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$ abbiamo $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$. Poichè M è triangolare inferiore e bidiagonale abbiamo

$$a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j}x_j^{(k)}.$$

Da cui si ricava

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j}x_j^{(k)} - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Se A è a predominanza diagonale allora M è invertibile e quindi il metodo è applicabile. La dimostrazione procede in modo analogo alla dimostrazione del teorema 6.3.1 delle dispense. In particolare, λ è autovalore di $P = M^{-1}N$ se e solo se $\det(\lambda M - N) = 0$. Ma se assumiamo per assurdo che $|\lambda| \geq 1$ allora

$\lambda M - N$ risulta a predominanza diagonale, infatti dalla predominanza diagonale di A abbiamo

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

da cui per $|\lambda| \geq 1$

$$\lambda |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |\lambda| |a_{ij}| \geq |\lambda| |a_{i, i-1}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

che dimostra la predominanza diagonale di $\lambda M - N$ se $|\lambda| \geq 1$. In questo caso abbiamo allora un assurdo dal momento che le matrici a predominanza diagonale sono invertibili e quindi $\det(\lambda M - N)$ non può essere singolare.

Esercizio 2. Si determini una condizione necessaria e sufficiente sul parametro reale k per la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ k & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e $b \in \mathbb{R}^n$.

Soluzione 2. La matrice di iterazione di Jacobi risulta

$$J = -k \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di J si possono calcolare osservando che $J = kI - kuu^T$ con u vettore tutto con componenti uguali a 1. Quindi, poichè gli autovalori di uu^T sono $\lambda = 0$ con molteplicità $n - 1$ e $\lambda = n$ con molteplicità 1, abbiamo che gli autovalori di J sono uguali a k con molteplicità $n - 1$ e poi abbiamo l'autovalore $k - kn = k(1 - n)$. Da cui segue che $\rho(J) = (n - 1)|k|$. Abbiamo quindi convergenza se e solo se $|k| < 1/(n - 1)$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita in termini del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ come

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ \alpha & \text{se } i = j + 1 \text{ oppure } i = 1 \text{ e } j = n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si diano condizioni sufficienti per la convergenza dei due metodi.
2. Dette J_A e G_A le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati ad A . Si dimostri che $\rho(G_A) = [\rho(J_A)]^n$.
3. Si dimostri invece che per la matrice trasposta vale $[\rho(G_{A^T})]^{n-1} = [\rho(J_{A^T})]^n$.

4. Si diano quindi le condizioni sul parametro α per la convergenza dei due metodi.
5. Si scriva una funzione Matlab che implementa il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema $Ax = b$. La funzione prende in input il parametro α , il vettore dei termini noti b , e calcola la successione dei vettori $x^{(k)}$ arrestandosi quando $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \leq 10^{-12}$ o se sono state effettuate 100 iterazioni. La funzione deve avere un costo lineare per iterazione, non richiedere la memorizzazione di A e restituire il residuo $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$, il vettore $x^{(k)}$ ed il valore k .

Soluzione 3. 1. I metodo risultano convergenti se la matrice A è a predominanza diagonale. Da cui abbiamo che Jacobi e Gauss Seidel risultano convergenti se $|\alpha| < 1$.

2. La matrice di iterazione di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & -\alpha \\ -\alpha & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di iterazione di Gauss-Seidel può essere costruita osservando che la matrice N risulta tutta nulla tranne l'elemento in posizione $(1, n)$ che è uguale a $-\alpha$. Pertanto la matrice G ha nulle le prime $n - 1$ colonne e la colonna n -esima può essere calcolata risolvendo il sistema lineare $MG(:, n) = N(:, n)$ ed è quindi data $G(i, n) = (-1)^i \alpha^i$.

Risulta quindi che G è triangolare superiore con sulla diagonale 0 e $(-1)^n \alpha^n$, quindi $\rho(G) = |\alpha|^n$. Per trovare gli autovalori di J possiamo calcolare il polinomio caratteristico con la regola di Laplace da cui abbiamo che il polinomio caratteristico risulta $p(\lambda) = \det(J - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} (-\alpha)^n$ da cui risulta che tutti gli autovalori sono tali che $|\lambda| = |\alpha|$. Si ottiene quindi che $\rho(G) = |\alpha|^n = (\rho(J))^n$.

3. Se consideriamo il metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati alla matrice $B = A^T$ si ottiene $J_B = J_A^T$ e quindi abbiamo ancora $\rho(J_B) = |\alpha|$. Per la matrice di Gauss-Seidel otteniamo invece

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha J_{n-1} \\ 0 & \alpha^2 e_1^T \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico risulta

$$p(\lambda) = \det(G_B - \lambda I) = -\lambda((-\lambda)^{n-1} + (-1)^n \alpha^2 (-\alpha)^{n-2})$$

Il raggio spettrale di G_B risulta quindi $\rho(G_B) = |\alpha|^{n/(n-1)}$, da cui segue la tesi.

4. Le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza sono quindi $|\alpha| < 1$.

```

5. function [x, k, err]=jacobi_solve(a, b)
    n=length(b);
    x=zeros(n, 1);
    err=inf;
    for k=1:100
        xn=do_step(a, b, x)
        err=norm(xn-x, 'inf')
        x=xn
        if err<10^-12
            break
        end
    end
end

function xn=do_step(a, b, x)
    n=length(b);
    xn=zeros(n, 1)
    xn(1)=b(1)-a*x(n);
    for i=2:n
        xn(i)=b(i)-a*x(i-1);
    end
end
end

```

Esercizio 4. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si dimostri che se $\det(A) = 0$ allora ogni metodo iterativo basato sulla decomposizione di $A = M - N$ con M invertibile è tale per cui la matrice P ha un autovalore uguale a 1 e quindi non possiamo avere convergenza di nessun metodo di questo tipo se applicato a una matrice singolare.

Soluzione 4. basta dimostrare che se $\det(A) = 0$ allora la matrice di iterazione $P = M^{-1}N$ ha 1 come autovalore ovvero $\det(P - I) = 0$./ Si considera allora $\det(P - I) = \det(M^{-1}N - I) = \det(M^{-1}(N - M)) = \det(M^{-1}) \det(N - M)$. Si osserva allora che $\det(M^{-1}) \neq 0$ poichè M è invertibile e che $\det(N - M) = (-1)^n \det(A) = 0$ da cui abbiamo che $\lambda = 1$ è autovalore di P .

Esercizio 5. Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = 1, j = n \text{ o } i = n, j = 1; \\ \alpha + 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } j = i + 1 \text{ o } j = i - 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini i valori del parametro α per cui A risulta predominante diagonale.

2. Si verifichi che il vettore di componenti $v_i = 1, i = 1, \dots, n$ è un autovettore della matrice di iterazione del metodo di Jacobi.
3. Si determini i valori del parametro α per cui il metodo di Jacobi applicato ad A risulta convergente.
4. Si scriva un programma MatLab che dato in input $b \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ e $itmax \in \mathbb{N}$ calcola la successione generata dal metodo di Jacobi con vettore iniziale nullo applicato per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ arrestandosi quando $\|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq 1.0e - 6$ o $k > itmax$ e restituendo in uscita la coppia x_k, k . Per $b = \text{ones}(100, 1), itmax = 100$ e $\alpha = 2$ riportare il valore di k restituito dal programma.

Soluzione 5. 1. Poichè in ogni riga ho i valori diagonali uguali ad $\alpha + 1$ e due valori non diagonali uguali a -1, la condizione di predominanza diagonale corrisponde a richiedere che $|\alpha + 1| > 2$. Questo corrisponde a richiedere che $\alpha > 1$ oppure che $\alpha < -3$.

2. La matrice di Jacobi risulta

$$J = \frac{1}{\alpha + 1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si osserva che posto $v_i = 1, i = 1, \dots, n$ abbiamo che $Jv = \frac{2}{\alpha + 1}v$. Infatti la somma di ogni riga della matrice J è sempre uguale a $\frac{2}{\alpha + 1}$. Questo implica che v è autovettore di J corrispondente all'autovalore $\frac{2}{\alpha + 1}$.

3. Applicando il teorema di Gershgorin alla matrice J si nota che gli autovalori sono tutti contenuti nel cerchio di centro 0 e raggio $\frac{2}{|\alpha + 1|}$, quindi $|\lambda| \leq \frac{2}{|\alpha + 1|}$. Poichè nel punto precedente abbiamo dimostrato che esiste un autovalore uguale a $\frac{2}{\alpha + 1}$, possiamo concludere che $\rho(J) = \frac{2}{|\alpha + 1|}$. Utilizzando le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza dei metodi iterativi abbiamo che il metodo è convergente se e solo se $\alpha > 1$ oppure se $\alpha < -3$.

4.

```
function [xk, k]=itera(b, alpha, itmax)
n=length(b);
x0=zeros(n, 1);
xk=zeros(n, 1);
err=inf;
k=0;
while k<= itmax & err>1.0e-6
xk(1)=(b(1)+x0(2)+x0(n))/(alpha+1);
xk(n)=(b(n)+x0(1)+x0(n-1))/(alpha+1);
for i=2:n-1
xk(i)=(b(i)+x0(i-1)+x0(i+1))/(alpha+1);
end
k=k+1;
err=norm(xk-x0, inf);
x0=xk;
end
```

Si ottiene $k = 33$.