1 Esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ ($\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ è lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2) definita da

$$f(at^2 + bt + c) = (a + b + c)t^2 + ct + c.$$

   Scrivere la matrice associata a f (secondo la base $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2$), e trovare nucleo e immagine di f.

2. Siano $V = \{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a+c+d = 0\}$, $W = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Trovare basi per $V \cap W$ e $V + W$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definita da $f(v) = v\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. (Prodotto matrice-vettore, $(2\times 1)\cdot(1\times 2)$, che genera una matrice 2×2). Scrivere la matrice associata a f utilizzando la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e la base di $\text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formata da

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Trovare una base dell'immagine e del nucleo della f trovata al punto precedente.

5. Siano $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dimostrare che $\text{span}\{u, v\}$ ha dimensione 2.

6. Sia $w = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha che $w \in \text{span}\{u, v\}$?

7. Per il valore di t trovato al punto precedente, scrivere esplicitamente w come combinazione lineare di u e v.

2 Soluzioni

1. Per trovare la matrice associata, scriviamo

$$f(p_1) = t^2 + t + 1 = 1p_1 + 1p_2 + 1p_3, \tag{1}$$
$$f(p_2) = t^2 = 0p_1 + 0p_2 + 1p_3, \tag{2}$$
$$f(p_3) = t^2 = 0p_1 + 0p_2 + 1p_3. \tag{3}$$

Quindi la matrice associata è $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Questo vuol dire che f trasforma il polinomio $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3$ nel polinomio $y_1p_1+y_2p_2+y_3p_3$, dove

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Per trovare il kernel e l'immagine di f, ci basta trovare kernel e immagine di A e "leggere" questo risultato nella base $\{p_1, p_2, p_3\}$. Fare conti sui vettori dati dalle scritture in base è perfettamente equivalente a farli sui polinomi.

È semplice trovare $\operatorname{im} A = \operatorname{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ (e questi due vettori sono una sua base), $\ker A = \operatorname{span}\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ (che è una sua base). Quindi $\operatorname{im} f = \operatorname{span}\{t^2 + t + 1, t^2\}$, $\ker f = \operatorname{span}\{t - 1\}$.

2. Per trovare una base di $V + W$, dobbiamo innanzitutto "presentare" V tramite un insieme di generatori. Questo equivale a trovare

$$\ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \{\begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}.$$

Allora abbiamo

$$V+W=\operatorname{span}\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\end{bmatrix}\}.$$

Da questo insieme di generatori estraiamo una base, ottenendo che i primi 4 vettori sono una base. Quindi $V+W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4, cioè tutto $\mathbb{R}^4$. Per trovare $V\cap W$, troviamo innanzitutto un insieme di equazioni per W. Riduciamo a scala

$$\begin{bmatrix}1&0&a\\-1&0&b\\0&2&c\\0&1&d\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&d\\0&0&a+b\\0&0&c-2d\end{bmatrix},$$

quindi $W=\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : a+b=0, c-2d=0\}$. Allora

$$V\cap W=\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : a+c+d=0, a+b=0, c-2d=0\}=\ker\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}=\operatorname{span}\{\begin{bmatrix}-3\\3\\2\\1\end{bmatrix}\}.$$

3. Le colonne della matrice associata A sono date dai coefficienti della scrittura di $f(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})$ e $f(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$ nella base data dello spazio di arrivo $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Abbiamo

$$f(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}=1M_1+2M_2+0M_3+0M_4,$$
$$f(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}=0M_1+0M_2+1M_3+2M_4.$$

Quindi la matrice associata è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Possiamo risolvere il problema direttamente lavorando con elementi di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, oppure ricondurci a un problema in $\mathbb{R}^4$ utilizzando la base M.

   Metodo 1 L'immagine è il sottospazio generato da $f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$ e $f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ (perché?), quindi $\mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\}$. Per trovare il kernel, scriviamo $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x & 2x \\ y & 2y \end{bmatrix}$; questa quantità vale zero se e solo se

   $$\begin{cases} x &= 0 \\ 2x &= 0 \\ y &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases}$$

   che ha solo le soluzioni $x = y = 0$. Quindi $\ker f = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ (il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ contenente il solo elemento $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$).

   Metodo 2 Alternativamente, troviamo $\mathrm{im}\, A = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ e poi prendiamo i vettori che hanno gli elementi di questi vettori come coefficienti nella scrittura nella base data:

   $\mathrm{im}\, f = \mathrm{span}\{1M_1+2M_2+0M_3+0M_4, 0M_1+0M_2+1M_3+2M_4\} \subseteq \mathbb{R}^4.$

   Analogamente, $\ker f = \ker A$.

5. Basta ridurre a scala $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e vedere che ci sono due pivot.

6. Ci stiamo chiedendo per quali t il sistema $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ è risolubile. Riducendo a scala, otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & t \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & t \\ 0 & 7 & -3t \\ 0 & 0 & -1 + \frac{1}{7}t \end{bmatrix}.$$

   Quindi il sistema è risolubile se e solo se $-1 + \frac{1}{7}t = 0$, cioè $t = 7$.

7. Per $t = 7$, possiamo continuare con l'eliminazione di Gauss ottenendo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   cioè il sistema è equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

   da cui $w = u - 3v$.