

4° Esame di MDAL

6 giugno 2016

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2, a_1 = 1; \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ per } n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ si ha

$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1} + 2.$$

(ii) Determinare il termine generale della successione a_n .

Esercizio 2. Avete organizzato una prova didattica del metodo RSA, e avete scelto i primi $p = 7$ e $q = 13$. Avete reso pubblico il prodotto $pq = 91$ e l'esponente $e = 5$. Ricevete il messaggio 44.

a) Qual è l'esponente 'segreto' d a cui dovete elevare 44 per riottenere il messaggio originale?

b) Qual è il messaggio originale $m \equiv 44^d \pmod{91}$ che vi è stato inviato?

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che

$$f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare $f \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix} \right)$.

(b) Determinare la dimensione del nucleo di f .

Esercizio 4. Sia

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare autovalori e autovettori della matrice M sul campo \mathbb{R} .
2. La matrice è diagonalizzabile su \mathbb{R} ?
3. La matrice è diagonalizzabile su \mathbb{Z}_5 ?