Exercises on Unconstrained Optimization

Find local and global minima of the following unconstrained optimization problems:

1. $$\begin{cases} \min\ 2\,x_1^3 - 2\,x_1^2\,x_2 + 3\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \min\ -2\,x_2^3 + x_1\,x_2^2 + x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \min\ (3\,x_1 - 3\,x_2)^2 + (-x_2^2 + 3\,x_1 - x_2)^2 + 1 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \min\ x_1^3 - x_1^2\,x_2 + 2\,x_1^2 - 3\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \min\ 2\,x_2^3 + 2\,x_1\,x_2^2 + 3\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 - x_2^2 - 3 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \min\ (-x_1 - 3\,x_2)^2 + (-x_2^2 - x_1 - x_2)^2 - 1 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \min\ x_1^3 - x_1^2\,x_2 + 4\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 - 2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \min\ -4\,x_2^3 - 3\,x_1\,x_2^2 - x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 - 5\,x_2^2 + 2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} \min\ (x_1 - 4\,x_2)^2 + (2\,x_1^2 - 3\,x_1 - 4\,x_2)^2 - 5 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} \min\ -x_1^3 + x_1^2\,x_2 + 2\,x_1^2 - x_1\,x_2 - x_2^2 - 4 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} \min\ x_2^3 + 3\,x_1\,x_2^2 - 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} \min\ (x_1 - 3\,x_2)^2 + (-2\,x_1^2 - 3\,x_1 + 3\,x_2)^2 - 4 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} \min\ (2\,x_1 + 2\,x_2)^2 + (-4\,x_2^2 - x_1 - 5\,x_2)^2 - 3 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} \min\ x_1^3 + x_1^2\,x_2 + 2\,x_1^2 + x_1\,x_2 - x_2^2 - 4 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} \min\ x_2^3 + x_1\,x_2^2 + x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 3\,x_2^2 + 2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} \min\ 3\,x_1^3 + x_1^2\,x_2 + 3\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 5 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} \min\ -2\,x_2^3 - 2\,x_1\,x_2^2 + x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 5\,x_2^2 + 5 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} \min\ (3\,x_1 - x_2)^2 + (-3\,x_1^2 + x_1 + x_2)^2 - 1 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} \min\ -x_1^3 - 3\,x_1^2\,x_2 - 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 5\,x_2^2 + 2 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1^3 - 3\,x_1^2\,x_2 + 4\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 2\,x_2^2 - 1 \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$